کاربرد روش تکسونومی و فاکتور آنالیز در درجه‌بندی شعب بانک‌ها

جناب آقای دکتر سید کاظم صدر
جناب آقای دکتر عباس عرب مازار
جناب آقای سیاوش امیرمکری[1]

چکیده:

بانک‌ها جهت سازماندهی، شعب خود را براساس شاخص‌هایی نظیر مقیاس فعالیت و حجم عملیات به درجات مختلف تقسیم می‌کنند. این درجه‌بندی معمولاً هر چند سال یکبار انجام می‌شود. با توجه به آثار مثبت و منفی تغییر درجه شعب بر فعالیت و وضعیت شغلی کارکنان، ارزیابی فعالیت‌های شعب باید با دقت خاص صورت پذیرد.

صرفنظر از معیارهای انتخابی برای ارزیابی شعب، روش معمول در اکثر بانک‌ها دادن امتیاز به هر یک از معیارها و جمع‌بندی امتیازات و در نهایت درجه‌بندی شعب براساس امتیازات کسب شده می‌باشد.

در این مقاله روش جدیدی برای درجه‌بندی شعب پیشنهاد می‌گردد که مبتنی بر روش‌های آماری «تکسونومی» و «تحلیل مؤلفه‌های اصلی» است. این روش‌های آماری ضمن سادگی و علمی بودن می‌تواند درجه شعب یک بانک را براساس اهداف و معیارهای تعیین شده به سهولت در اختیار ما قرار دهد.

۱- به ترتیب دانشیار، استادیار و فارغ‌التحصیل رشته کارشناسی ارشد دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی.

بسمه تعالی

کاربرد روش تکسونومی و فاکتور آنالیز در درجه‌بندی شعب بانک‌ها

مقدمه

بانک‌ها برحسب مقیاس فعالیت و حجم عملیات و تعداد کارمندان و امکانات فیزیکی موجود، شعب خود را به ترتیب نزولی از درجه یک تا چهار سازماندهی می‌نمایند. به منظور سنجش حجم کار و فعالیت شعب و مقایسه کمیت و کیفیت عملکرد آنها با یکدیگر و سوق دادن فعالیت شعب در جهت تحقق برنامه‌های اصلی و اساسی بانک به بررسی فعالیت شعب در دوره‌های گذشته می‌پردازند. این بررسی‌ها معمولاً هر دو سال یک بار انجام می‌گیرد و گاه منجر به ارتقاء درجه برخی از شعب و تنزل برخی دیگر می‌گردد. نظر به این که ارتقاء و تنزل در چه شعب می‌تواند آثار مثبت و منفی بر وضعیت شغلی کارکنان داشته باشد لذا ارزیابی فعالیت شعب می‌تواند ابزاری در جهت تشویق کارکنان برای تلاش بیشتر و ارتقاء درجه شعبه باشد.

هر یک از دو گروه بانک‌های تخصصی و تجاری بسته به اهداف درنظر گرفته شده، برای ارزیابی فعالیت شعب خود از معیارهایی استفاده می‌نمایند. صرفنظر از معیارهای انتخابی، روش درجه‌بندی در اکثر بانک‌ها روش دادن امتیاز به هر یک از معیارهای موردنظر و جمع‌بندی امتیازات و در نهایت درجه‌بندی براساس امتیاز کسب شده توسط هر یک از شعب می‌باشد. میزان امتیاز لازم جهت قرار گرفتن شعب در یک درجه خاص، توسط هیئت مدیره بانک تعیین می‌گردد. به عنوان مثال اگر شعبه‌ای امتیازش بین ۷۰ تا ۱۰۰ باشد درجه یک خواهد بود و اگر امتیازش بین ۴۰ تا ۷۰ باشد جزء شعب درجه دو قرار خواهد گرفت و...

در مقاله حاضر هدف معرفی روش‌های «تکسونومی» و «مؤلفه‌های اصلی» جهت رتبه‌بندی و درجه‌بندی شعب یک بانک می‌باشد. اما قبل از بیان روش تکسونومی لازم است در مورد لزوم کاربرد روش ایجاد مؤلفه‌های اصلی توضیحی داده شود.

گاهی میان معیارهایی که برای ارزیابی فعالیت شعب انتخاب می‌شوند، همبستگی متقابل وجود دارد. به عنوان مثال معیارهای موجودی حساب‌های سپرده‌گذاری مدت‌دار و مبلغ تسهیلات اعطایی در قالب عقود مختلف جزء معیارهای ارزیابی فعالیت شعب می‌باشند. از آنجاکه موجودی حساب‌های سپرده‌گذاری مدت‌دار یکی از منابع تأمین وجوه مربوط عرضه عقود می‌باشند، بین این دو معیار

همبستگی متقابل وجود خواهد داشت به طوری که با افزایش یا کاهش حجم موجودی حساب‌های مزبور، مبلغ تسهیلات اعطایی نیز به ترتیب افزایش یا کاهش می‌یابد.

وجود همبستگی بین معیارها موجب می‌گردد که هر یک از آنها پدیده‌های مربوط به دیگری را اندازه‌گیری نمایند و نتیجه‌گیری را دچار اشکال نماید.

به منظور رفع مسئله فوق لازم است قبل از رتبه‌بندی و درجه‌بندی شعب به وسیله روش تکسونومی، با به کارگیری روش مؤلفه‌های اصلی به ایجاد معیارهایی که دیگر مشکل همبستگی با یکدیگر را ندارند بپردازیم.

روش «آنالیز تکسونومی» در رتبه‌بندی شعب

این روش یکی از روش‌های درجه‌بندی و طبقه‌بندی است که در علوم مختلف مورداستفاده قرار می‌گیرد. سابقه این روش به سال 1763 برمی‌گردد ولی طی سال‌ها این روش بسط و توسعه یافته است. در سال 1968 از آن به عنوان وسیله‌ای برای طبقه‌بندی و درجه توسعه یافتگی بین ملل مختلف استفاده شد و از آن به بعد به عنوان یک روش درجه‌بندی و طبقه‌بندی و مقایسه کشورها یا مناطق مختلف به کاربرد شده است (۲) . در زیر به بیان روش «تکسونومی روکلا» می‌پردازیم.

مجموعه‌ای را درنظر می‌گیریم که شامل n عضو می‌باشد. اعضای این مجموعه در اینجا شعبه‌های یک بانک فرض می‌شوند. فرض کنید که برای ارزیابی عملکرد آنها از m معیار (خصوصیت) که شعب مختلف دارا می‌باشند استفاده می‌کنیم. با فرض وجود تعداد n عضو و m خصوصیت در جامعه آماری، داده‌های جمع‌آوری شده مربوط به معیارهای اعضاء به شکل زیر خواهد بود:

شعبه 1 با مقادیر خصوصیت از 1 تا m $A_1(X_1, X_2, X_3,...,X_m)$

شعبه 2 با مقادیر خصوصیت از 1 تا m $A_2(X_1, X_2, X_3,...X_m)$

شعبه n با مقادیر خصوصیت از 1 تا m $A_n(X_1, X_2, X_3,...X_m)$

اطلاعات فوق را می‌توان با استفاده از ماتریس به شکل زیر نشان داد:

$$X = \begin{matrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \dots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \dots & X_{2m} \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} \dots & X_{nm} \end{matrix}$$

بدین ترتیب اطلاعات هر شعبه توسط یک بردار سطری در ماتریس فوق نشان داده می‌شود که در آن X_{ij} نشان دهنده معیار jام از شعبه iام است.

نکته‌ای که در مورد عناصر ماتریس X وجود دارد تفاوت در واحد اندازه‌گیری آنهاست. در این ماتریس عناصر هر ستون (مانند X_{11} و X_{21} و ... و X_{n1}) دارای مقیاس‌های یکسان می‌باشند. مثلاً

تعداد تسهیلات اعطائی در قالب عقد قرض‌الحسنه) اما واحد اندازه‌گیری از یک ستون به ستون دیگر ممکن است تغییر نماید. به عنوان مثال، واحد اندازه‌گیری اعضای ستون سوم ممکن است مبلغ تسهیلات باشد. بنابراین، می‌باید به منظور ایجاد امکان مقایسه معیارهای (خصوصیت‌ها) دخالت واحدهای اندازه‌گیری متفاوت را از داخل الگو از بین برد. برای این منظور اطلاعات اولیه این متغیرها را به اطلاعات استاندارد تبدیل می‌نمایند بدین ترتیب ابتدا میانگین هر ستون ماتریس X را به دست آورده و از تک‌تک اعضای ستون مربوطه کم می‌کنند سپس نتیجه را بر انحراف معیار همان ستون تقسیم می‌نمایند.

یعنی:

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{s_j}$$

که در آن Z_{ij} عنصر سطر iام و ستون jام ماتریس استاندارد شده

$\bar{X}_j$ میانگین ستون jام ماتریس X

s_j انحراف معیار ستون jبام ماتریس X است.

ماتریس استاندارد شده به صورت زیر است:

$$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \dots Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \dots Z_{2n} \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} \dots Z_{nn} \end{matrix}$$

میانگین هر ستون از ماتریس Z برابر صفر و انحراف معیار آن برابر یک است. بعد از محاسبه ماتریس استاندارد به محاسبه اختلاف یا فاصله شعب از یکدیگر برای هر کدام از m معیار (خصوصیت) می‌پردازیم. معیارهای ما ایجادکننده ابعاد «فضای تکسونومی» می‌باشند که شعب در آن قرار دارند. به عبارت دیگر در صورتی که فقط دو خصوصیت داشته باشیم این خصوصیات تشکیل یک فضای دو بعدی را می‌دهند که هر شعبه یک نقطه از این فضا را اشغال می‌کند و اگر m خصوصیت وجود داشته باشد تشکیل یک فضای m بعدی را خواهند داد که هر شعبه در این فضا یک نقطه را مشخص می‌کند. برای محاسبه فاصله دو شعبه (دونقطه) در «فضای تکسونونی» ایجاد شده توسط «معیارهای ارزیابی عملکرد» از قضیه فیثاغورث استفاده می‌شود.

با فرض وجود سه شعبه و دو معیار با استفاده از قضیه مذکور به محاسبه فاصله بین شعب در فضای دو بعدی می‌پردازیم. بدیهی است مطالب زیر برای ماتریس Z با n شعبه و m معیار (خصوصیت) قابل بسط می‌باشد.

به منظور بررسی عملکرد سه شعبه A, B, C دو معیار 1(X) و 2(X) را درنظر می‌گیریم بنابراین ماتریس X به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} X_{A1} & X_{A2} \\ X_{B1} & X_{B2} \\ X_{C1} & X_{C2} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه فاصله شعب از ماتریس زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} X_{A1} - X_{B1} & X_{A2} - X_{B2} \\ X_{A1} - X_{C1} & X_{A2} - X_{C2} \\ X_{B1} - X_{C1} & X_{B2} - X_{C2} \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق متشکل از 2 = 1 - 3 ماتریس است که می‌توان آنها را توسط 1 = 2 - 3 پارتیشن افقی از هم مجزا ساخت، ابعاد ماتریس‌های پارتیشن از بالا به پائین برابر خواهد بود با:

$(n - 1) \times m = (3 - 1) \times 2 = 2 \times 2$

$(n - 2) \times m = (3 - 2) \times 2 = 1 \times 2$

ماتریس فوق برای n شعبه با m خصوصیت متشکل از n-1 ماتریس است که می‌توان آنها را توسط n-2 پارتیشن افقی از هم مجزا ساخت ابعاد این ماتریس‌ها به ترتیب از بالا به پائین برابر خواهد بود با:

$(n - 1) \times m,\ (n - 2) \times m,\ (n - 3) \times m, \ldots, 2 \times m,\ 1 \times m$

حال برای به دست آوردن فواصل بین نقاط (در مثال) از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$D_{AB} = \sqrt{\sum^{2}_{J=1} (X_{AJ} - X_{BJ})^2}$$

$$D_{AB} = \sqrt{(X_{A1} - X_{B1})^2 + (X_{A2} - X_{B2})^2}$$

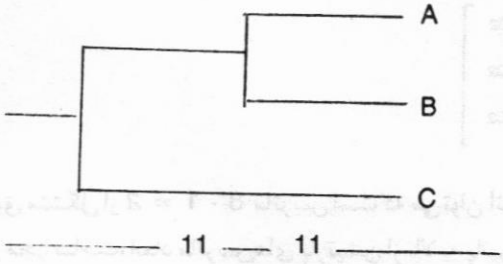
$$D_{AC} = \sqrt{\sum^{2}_{J=1} (X_{AJ1} - X_{CJ})^2}$$

$$D_{BC} = \sqrt{\sum^{2}_{J1} (X_{BJ} - X_{CJ})^2}$$

ملاحظه می‌شود که فرمول فوق نیز همان فرمول قضیه فیثاغورث برای تعیین وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. پس از محاسبه فواصل بین نقاط «ماتریس فواصل» D را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} D_{AA} & D_{AB} & D_{AC} \\ D_{BA} & D_{BB} & D_{BC} \\ D_{CA} & D_{CB} & D_{CC} \end{bmatrix}$$

D_{AA} بیانگر فاصله شعبه A از خودش می‌باشد که برابر صفر است همان‌طور که ملاحظه می‌شود ماتریس فواصل قرینه می‌باشد و قطر اصلی آن برابر صفر است. ماتریس D فاصله هر شعبه را از شعبه دیگر نشان می‌دهد. پس از این مرحله باید بین شعب براساس نزدیکی فواصلشان به یکدیگر ارتباط برقرار کرد نمودار زیر این ارتباط را برقرار می‌سازد:



نمودار فوق از ماتریس فواصل رسم می‌گردد اگر شعبه A و B به هم نزدیکتر بودند ارتباطی بین این دو شعبه برقراری می‌گردید این ارتباط بیانگر عملکرد نزدیک دو شعبه می‌باشد.

بنابراین A و B تقریباً در یک گروه همگن قرار می‌گیرند، روش تکسونومی نیز در ابتدا به دنبال انتخاب گروه‌های همگن و جداسازی گروه‌های غیرهمگن از آنها و سپس درجه‌بندی آنها می‌باشد.

بنابراین A و B تقریباً در یک گروه همگن قرار می‌گیرند، روش تکسونومی نیز در ابتدا به دنبال انتخاب گروه‌های همگن و جداسازی گروه‌های غیرهمگن از آنها و سپس درجه‌بندی آنها می‌باشد.

مسئله‌ای که در جداسازی گروه‌های همگن از غیرهمگن اهمیت دارد، مسئله «معیار» همگنی است.

برای این منظور از «فاصله حداقل بحرانی» استفاده می‌کنند این فاصله توسط فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد[1]:

$$C_{(+)} = C + 2\,s_c$$

$$C_{(-)} = C - 2\,s_c$$

که در آنها:

C میانگین کوتاه‌ترین فاصله (غیرصفر) در هر سطر ماتریس فواصل (C_i) s_c انحراف معیار کوتاه‌ترین

۱- اعداد 2 در فرمول‌ها به این منظور درنظر گرفته شده‌اند که سطح زیر منحنی توزیع نرمال به اندازه دو انحراف معیار چپ و راست درنظر گرفته شده تا احتمال اینکه کمیت‌های استاندارد شده در یک مجموعه خارج از سطح موردنظر ما قرار گیرند O/O5 درصد باشد.

فاصله (غیر صفر) سطرها در ماتریس فواصل است

$$S_C = \sqrt{\frac{1}{n} \sum^{n}_{J=1} (C_J - \bar{C})^2}$$

اگر:

$$C_{(-)} < D_{AB} , D_{AC} < C_{(+)}$$

شعب A و B و C همگن خواهد بود.

حال برای رتبه‌بندی شعب از نظر عملکرد، نیاز به یک معیاری است که شعب با آن معیار سنجیده شده و بر اساس فاصله‌شان تا آن «نقطه ایده‌آل» رتبه‌بندی شوند. برای این منظور برای هر خصوصیت (متغیر) در سه شعبه بزرگترین مقدار را به عنوان «ایده‌آل» رتبه‌بندی شوند. برای این منظور برای هر خصوصیت (متغیر) در سه شعبه بزرگترین مقدار را به عنوان «ایده‌آل» درنظر می‌گیریم[1] . بدین ترتیب که در هر ستون از ماتریس بزرگترین مقدار را به دست می‌آوریم.

بنابراین شعبه ایده‌آل ما به صورت زیر خواهد بود:

$$X_o(\text{Max } X_1 \text{ و } \text{Max } X_2)$$

سپس به محاسبه فاصله هر یک از شعب تا «شعبه ایده آل» می‌پردازیم این فاصله نیز با استفاده از قضیه فیثاغورث قابل محاسبه می‌باشد که در فرمول زیر خلاصه گردیده است.

$$C_{Io} \sqrt{\sum^{2}_{J=1} (X_{IJ} - X_{oJ})^2}$$

هر چقدر عدد C_{Io} بزرگتر باشد نشاندهنده فاصله بیشتر شعبه i از شعبه ایده‌آل است با توجه به توضیحات فوق فاصله شعبه با شعبه ایده‌آل از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$d_i = \frac{C_{io}}{C_o}$$

که در آن d_i = فاصله شعبه iام از شعبه ایده‌آل

$$C_o = \bar{C}_{io} + 2s_{io}$$

C_o = فاصله بحرانی از شعبه ایده‌آل

$$C_{io} = \frac{1}{n} \sum C_{io}$$

C_{io} = میانگین فواصل شعب از شعبه ایده‌آل

$$S_{Io} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum^{n}_{i=1} (CO_{io} - \bar{C}_{io})^2}$$

s_{io} = انحراف معیار فواصل شعب از شعبه ایده‌آل

$$d_A = \frac{C_{Ao}}{C_o}$$

فاصله شعبه A از شعبه ایده‌آل

فاصله شعبه B از شعبه ایده‌آل

۱- البته خصوصیات به گونه‌ای تعریف می‌شوند که بزرگترین بودن آنها مطلوب است.

$$d_B = \frac{C_{Bo}}{C_o}$$

فاصله شعبه C شعبه ایده‌آل

$$d_C = \frac{C_{Co}}{C_o}$$

هرچقدر d_i به صفر نزدیکتر باشد نشانه نزدیک‌تر بودن شعبه i به شعبه ایده‌آل (امتیاز بیشتر آن) و هر قدر به یک نزدیکتر باشد علامت دوری از شعبه ایده‌آل (امتیاز کمتر آن) است.

همان طور که ملاحظه می‌شود در صورت افزایش تعداد شعب و معیارهای موردنظر بانک عملیات فوق بسیار گسترده و وقت‌گیر می‌گردد بنابراین برای کاربرد روش تکسونومی، بسته‌های کامپیوتری (از جمله LOTUS) مورداستفاده قرار می‌گیرد.

IV - روش «مؤلفه‌های اصلی[1]» و «تجزیه و تحلیل عوامل[2]»

روش‌های فوق یکی از روش‌های تجزیه و تحلیل داده‌های آماری با واریانس‌های متعدد می‌باشند. که با استفاده از آنها به خلاصه کردن تعداد متغیرها (معیارها) می‌پردازند. علاوه بر این روش‌های فوق قادرند پدیده‌هائی که از لحاظ ارزیابی کمی مشکلات زیادی دارند دسته بندی نموده و جهت توجیه آنها شاخص‌هائی ارائه دهند.

روش مؤلفه‌های اصلی تا حدی شبیه به روش حداقل مربعات متعامد[3] می‌باشد که توسط «پیرسون» در سال 1901 ارائه گردید و بعد از آن توسط هتلینگ در سال 1936 برای تجزیه و تحلیل ساختار همبستگی گسترش یافته است. در زیر ابتدا به بیان کاربرد و سپس به نحوه عمل روش‌های فوق خواهیم پرداخت: به منظور مقایسه فعالیت‌ها و یا رتبه‌بندی عملکرد واحدهای اقتصادی (اعم از تولیدی و خدماتی) که در یک رشته خاص فعالیت دارند آمار و اطلاعات مربوط به معیارها از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشند گاهی درمی‌یابیم اطلاعاتی راکه در اختیار داریم بیش از نیاز ما هستند و میان تعدادی از آنها همبستگی وجود دارد.

این ارتباط بین معیارها موجب می‌گردد که گاه چند معیار یک چیز را اندازه گرفته و نتیجه گیری را دچار اشکال نمایند. به عنوان مثال تعداد تسهیلات اعطائی با موجودی حساب‌های سرمایه‌گذاری همبستگی دارند. اگر این همبستگی شدید باشد هر یک از معیارها، پدیده‌های مربوط به دیگری را اندازه‌گیری می‌نمایند. برای رفع این مشکل از روش مؤلفه‌هایه اصلی و تجزیه و تحلیل عوامل استفاده می‌شود.

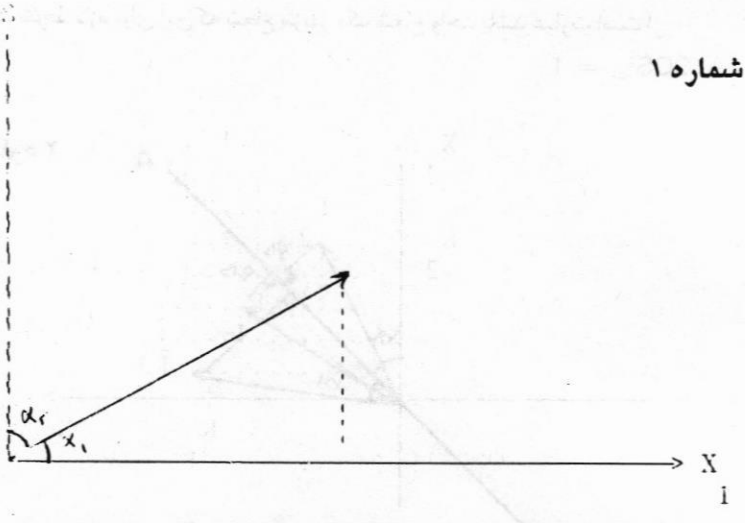
1- PRINCIPLE COMPONETS ANALYSIS 2- FACTOR ANALYSIS

3- OARTHEGONAL LEAST SQUARES

به منظور بیان نحوه عمل این روش ابتدا مجموعه‌ای را درنظر می‌گیریم که شامل n عضو بوده، اعضای این مجموعه واحدهایی هستند که می‌خواهند موردارزیابی قرار گیرند (که در اینجا همان شعب بانک می‌باشند) مجموعه متغیرها یعنی همان خصوصیات یا شاخص‌های اولیه که تعداد آنها می‌تواند از یک تا m باشد به همراه عناصر مجموعه تشکیل همان ماتریس X را می‌دهند.

در ماتریس فوق X_{ij} ها بیانگر خصوصیت jام در شعبه iام می‌باشند یعنی هر کدام از n شعبه (ردیف) دارای m خصوصیت (ستون) قابل اندازه‌گیری هستند. هر عضو از جامعه مذکور توسط یک بردار در فضای m بعدی نمایش داده می‌شود که هر بعد مرتبط با یک خصوصیت می‌باشد برای توضیح مطلب می‌توانیم m را مساوی 2 و n مساوی 1 قرار داده (یعنی فقط دو خصوصیت) و فرض کنیم خصوصیات X_1 و X_2 با یکدیگر همبستگی داشته باشند. شعبه A مقادیر X_1 و X_2 را به‌گونه‌ای انتخاب کرده است که در فضای دو بعدی بردار F_1 را مشخص می‌نماید، به دلیل فرض فوق احتمال این که F_1 در «مکان واقعی» خود قرار نگرفته باشد وجود دارد بنابراین لازم است که همبستگی F_1 را با X_1 و X_2 به دست آوریم برای این منظور اگر طول بردار F_1 را واحد درنظر بگیریم و از F_1 عمودی بر X_1 رسم نمائیم تصویر این بردار، بر محور X_1 (L_1) بیانگر همبستگی F_1 با خصوصیت X_1 خواهد بود[1]

شکل شماره ۱



۱- برای نشان دادن همستگی میان دو متغیر، می‌توان این همبستگی را به صورت بردارهایی با طول واحد که دارای یک مبدأمشترک می‌باشند به نحوی ترسیم نمود که کسینوس زاویه بین آنها برابر ضریب همبستگی میان دو متغیر باشد.(۳)

طول L_1 در شکل برابر $COS\ a_1$ می‌باشد. حال اگر از F_1 عمودی بر X_2 رسم کنیم تصویر این بردار بر محور X_2 (L_2) بیانگر همبستگی F_1 با خصوصیت X_2 خواهد بود طول L_2 نیز برابر $COS\ a_2$ می‌باشد یعنی:

$$L_1 = COS\ a_1$$

$$L_2 = COS\ a_2$$

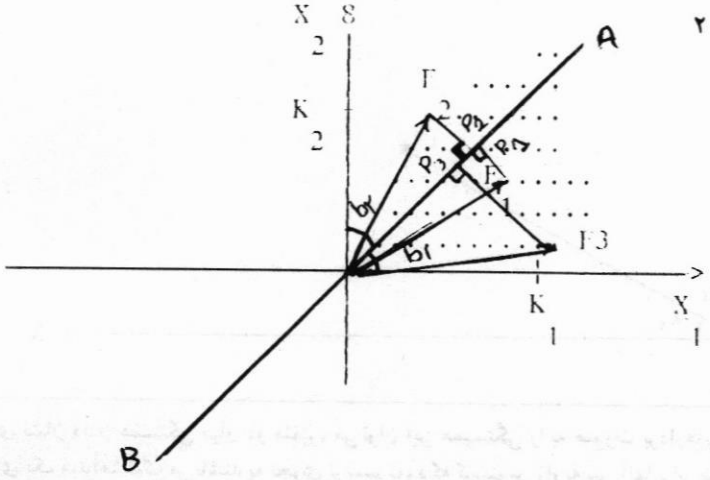
اگر تعداد انبوهی از بردارها (که هر کدام از آنها بیانگر یک عضو از جامعه می‌باشند) را مانند آنچه که در شکل شماره (3) نشان داده شده داشته باشیم، می‌توانیم به جای استفاده از محورهای X_1 و X_2 شعاعی مانند AB در شکل (3) که از مبدأ بردارها می‌گذرد و به محور اصلی بردارها نزدیکتر می‌باشد را جهت بررسی همبستگی بین متغیرها مورد استفاده قرار دهیم برای مشخص کردن موقعیت هر بردار، بر روی هر محور یک بردار واحد (K_1 و K_2) مشخص می‌کنیم. حال متغیرهای X_1 و X_2 می‌توانند به عنوان یک اسکالر درنظر گرفته شوند به طوری که هر بردار توسط یک ترکیب خطی از دو متغیر تعریف شود:

$$F_j = K_1 X_{i1} + K_2 X_{i2}$$

شعاع AB را می‌توان به وسیله زاویه‌ای که این شعاع با دو محور X_1 و X_2 (b_1 و b_2) می‌سازد معین نمود، شرط لازم برای این که شعاع مزبور یک شعاع واحد باشد عبارت است از:

$$C_OS^2{}_{b1} + COS^2{}_{b2} = 1$$

شکل شماره ۲



تصویر F_1 (یا هر بردار دیگر از انبوه ردارهای موجود در شکل 2) بر روی AB توسط یک تابعی از کسینوس زوایای b_1 و b_2 تعریف می‌شود:

$$\text{تصویر } F_1 \text{ بر } AB = K_1 X_1 \cos b_1 + K_2 X_2 \cos b_2$$

برای به دست آوردن شعاع AB که به عنوان نماینده مجموعه نقاط شکل شماره (2) مطرح است دو راه حل وجود دارد:

1 ـ حداقل کردن مجموع مربعات فاصله تمام نقاط تا شعاع AB.

2 ـ حداکثر کردن مجموع مربعات تصاویر بردارها بر روی شعاع AB.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود راه حل اول، روش معمول در برآورد پارامترهای رگرسیون یعنی روش حداقل مربعات معمولی[1] است.

این روش به دلیل وجود همبستگی بین متغیرها، که مسئله هم خطی را به دنبال خواهد داشت برآوردن مناسبی از شعاع AB را به ما نخواهد داد.

نظر به کاربرد راه حل دوم در تعیین «مؤلفه‌های اصلی» (که هدف این بخش توضیح آن می‌باشد) به بیان مفهوم آن می‌پردازیم.

اگر بردارهای F_1 و F_2 و F_3 را به عنوان نمونه‌هائی از انبوه بردارهای موجود در شکل (3) داشته باشیم با فرض وجود همبستگی بین این بردارها (که زوایای بین این بردارها میزان این همبستگی را مشخص می‌نمایند[2]) می‌توانیم مجموعه بردارهای نظیر F_1 و F_2 و F_3 را به صورت فشرده‌تری دربیاوریم. برای این منظور محوری را ترسیم می‌نمائیم (مانند AB) که از مبدأ بردارها بگذرد سپس از هر بردار به طول واحد، عمودی بر آن فرود می‌آوریم تا تصویر بردار بر روی محور تشکیل شود و جمع مربع این تصاویر به حداکثر برسد. در این حالت به دلیل این که بردارها هر یک به طول واحد هستند، طول تصاویرشان نیز برابر کسینوس زاویه تشکیل شده بین بردار و محور (AB) خواهد بود شکل (2). بنابراین طول تصاویر همبستگی هر یک از متغیرها با محور اصلی یا مقیاس اصلی (محور AB) را نشان می‌دهد. در این جا این نکته نیز مشخص می‌گردد که علت به حداکثر رساندن واریانس تصاویر بردارها (مجموع مربعات تصاویر) به دست آوردن مقیاسی است که حداکثر همبستگی را با مجموع متغیرها داشته باشد. در این صورت اکنون ما به جای دو محور (مثل محور X_1 و X_2 که هر کدام بیانگر یک خصوصیت هستند) فقط یک محور که ترکیب خطی از خصوصیات (X_1 و X_2) است خواهیم داشت.

1- ORDINARY LEAST SQUARE

۲ - برای توضیح رجوع شود به منبع شماره (3).

طول تصاویر متغیرها روی محور به نام «بار» یا «وزن» خوانده می‌شود که دو متغیر ما را به صورت یک متغیر درآورده است.

با افزایش تعداد متغیرها تعداد محورها افزایش می‌یابند به طوری که این محورها می‌توانند ایجاد فضای تکسونومیک دو، سه یا OOO بعدی نمایند. ولی سؤالی که مطرح می‌شود این است که در میان تعدادی از محورها بهترین مؤلفه اصلی (یا ترکیب خطی برای ساختار متغیرها) کدام است؟

در پاسخ می‌توان گفت اولین مؤلفهٔ اصلی که بیشترین واریانس همبستگی را نسبت به تمامی معیارها (خصوصیت‌ها) دارد، بهترین ترکیب واحد را از روابط خطی که در داده‌ها مشاهده می‌شود بیان می‌کند.

بعد از آن دومین مؤلفهٔ اصلی، ترکیب خطی از معیارها است که بیشترین واریانس باقی مانده پس از کسر اثر بهترین مؤلفه (اول) را اندازه‌گیری می‌نماید (تحت این شرایط، فاکتور دوم بر فاکتور اول عمود است) زیرا در غیر این صورت، فاکتور دوم با اندازه‌گیری همبستگی بین متغیرها که یک بار توسط فاکتور اول درنظر گرفته شده است نمی‌تواند به طور مستقل در ایجاد فضای تکسونومی عمل نماید. فاکتورهای بعدی نیز در صورت وجود داشتن به همین ترتیب به دست می‌آیند. برای دست‌یابی به فکتورها بسته کامپیوتری SPSS مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ضمیمه یک: طرز استفاده از نرم‌افزار SPSS

برای وارد شدن به نرم‌افزار دستورهای زیر را می‌دهیم:

C:\>CD SPSS ENTER

C:SPSS\> SPSS ENTER

برای این که کرستر کوچک شود باید دستور ALTE را بزنیم سپس دستورات زیر را تایپ می‌کنیم:

DATA LIST FREE/X_1 To X_n.

BEG1N DATA

X_{11} X_{12}... X_{1n}

X_{21} X_{22}...X_{2n}

X_{m1} X_{m2}... X_{mn}

END DATA.

سپس برای به دست آوردن فاکتورها (ایجاد مؤلفه‌های اصلی) دستور زیر را تأیپ می‌کنیم:

FACTOR/VAR X_1 To X_n / EXTRACTION PC.

در پایان کلید F_{10} را می‌زنیم نتایج فاکتورها مشخص می‌گردد.

ضمیمه دو: طرز استفاده از نرم افزار LOTUS

برای وارد شدن به نرم‌افزار دستورهای زیر را تایپ می‌کنیم:

CDLOTUS ENTER

C: LOTUS\> 123 ENTER

سپس مانند روش نرم‌افزار SPSS ماتریس داده‌ها را وارد نرم‌افزار LOTUS می‌کنیم بعد از آن ماتریس فاکتورها را وارد کرده و ماتریس داده‌ها و فاکتورها درهم ضرب می‌کنیم ماتریس حاصل را استاندارد می‌کنیم با فرض وجود تعداد ۲۰ شعبه و ۴ شاخص برای استاندارد کردن دستورات زیر را تایپ می‌کنیم:

برای میانگین کردن $\delta AVG\ (A_1...A_{20}) = A_{21}$

برای انحراف معیار $\delta STO\ (A_1...A_{20}) = A22$

برای استاندارد کردن $+(A_1 - A_2) / A_{22} = A_{23}$

$+(A_2 - A_{21}) / A_{22} = A_{24}$

$+(A_{20} - A_{21}) / A_{22} = A_{42}$

برای شاخص‌های دیگر نیز (D, C, B) به همین صورت عمل می‌کنیم.

حال در هر ستون ماتریس استاندارد شده ماکزیمم مقدار موجود را مشخص می‌کنیم:

بعد به تعیین فواصل می‌پردازیم: σ MAX $(A_{23} \ldots A_{24}) = A_{43}$

$+(A_{23} - A_{43})^{82} = A_{44}$

$+(A_{24} - A_{43})^{82} = A_{45}$

$+(A_{42} - A_{43})^{82} = A_{63}$

در مرحله بعد تمام فواصل را برای شعب موجود (در اینجا با فرض چهار شاخص D و C ، B ، A) به صورت سطری جمع زده سپس جذر می‌گیریم:

δ SUM $(A_{44} \ldots D_{44}) = E_{44}$

δ STD $(E_{44}) = F_{44}$

δ SUM $(A_{45} \ldots D_{45}) = E_{45}$

δ STD $(E_{45}) = F_{45}$

δ SUN $(A_{63} \ldots D63) = E_{63}$

δ STD $(E_{63}) = F_{63}$

حال‌برداری داریم با ۲۰ سطر برای تعیین رتبه شعب ابتدا میانگین و سپس انحراف معیار عناصر بردار را به دست می‌آوریم:

δ AVG$(F_{44} \ldots F_{63}) = F_{64}$

δ STD$(F_{44} \ldots F_{63}) = F_{65}$

برای محاسبه «فاصله حداقل بحرانی» عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

$+ F_{64} + 2 + F_{65} = F_{66}$

سپس برای تعیین فاصله شعب از شعبه ایده‌آل

$+F_{44} / F_{66}$

$+F_{45} / F_{66}$

$+F_{63} / F_{66}$

اعدادی که عملیات فوق به دست می‌آید مثبت و کوچکتر از یک می‌باشد. هر چه عدد به صفر نزدیکتر باشد نشان دهنده وضعیت شعبه مربوطه در بسته‌بندی می‌باشد.

منابع

1 ـ بیدآباد ـ بیژن. آنالیز پریسیال کامپونتز. (روش ایجاد مؤلفه‌های اصلی) در تهیه شاخص‌های توسعه برای شهرستان‌ها جهت برنامه ریزی منطقه‌ای، سازمان برنامه و بودجه، دفتر برنامه ریز منطقه‌ای، پائیز 1362.

2 ـ بیدآباد ـ بیژن. آنالیز تکسونومی (روش طبقه‌بندی گروه‌های همگن) و کاربرد آن در طبقه‌بندی شهرستان‌ها و ایجاد شاخص‌های توسعه جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای، سازمان برنامه و بودجه استان مرکزی. (اراک) تیرماه 1362.

3 ـ سازمان برنامه و بودجه. مطالعاتی در زمینه‌های مربوط به برنامه ریزی منطقه‌ای، مجموعه سوم، دفتر برنامه‌ریزی منطقه‌ای. سال 1362.

4 - Jac - on kim. STATISTICAL PACKAGE FOR THE SOCIAL SCIENCES, FACTOR ANALYSIS. university of Iowa.