چکیده

اختیار معامله در معنای کلی، نوعی قرارداد است که در آن فروشنده، اختیار معامله به خریدار، اختیار خرید یا فروش کالایی خاص در زمان آینده را با قیمت توافقی یا تضمینی که هم‌اکنون مشخص می‌گردد، می‌دهد. این اختیار الزام‌آور نیست. البته ممکن است این قیمت توافقی به‌صورت تابعی از تغییرات قیمت کالای مذکور در بازار سهام صورت بگیرد. از حدود دویست سال پیش انواع مختلفی از اختیارهای معامله در بازار بورس شیکاگو داد و ستد می‌گردد. کاربرد چنین اختیاراتی را می‌توان به‌عنوان مثال، جهت کاهش ریسک خرید قراردادهای آتی توجیه کرد؛ اگر شخصی نیازمند کالایی خاص در زمان آینده باشد، اما ورود در قراردادهای آتی را با ریسک بالا ارزیابی کند، می‌تواند با خرید یک اختیار خرید مناسب بر روی قرارداد آتی مذکور ریسک خود را پایین بیاورد. سیستم بانکی، امروزه در کشورهای پیشرفته در حجم بسیار وسیع از اختیار معامله در زمینه نرخ ارز، نرخ بهره و سایر زمینه‌ها استفاده می‌کند. این زمینه‌ها درکشور ما هنوز مورد توجه کافی قرار نگرفته و توجه به آنها فرصت‌های قابل توجهی را فرا روی نظام بانکی قرار می‌دهد.

مساله مهمی که هم از نظر ریاضی و هم از نظر اقتصادی حائز اهمیت است، کاهش ریسک فروش این اوراق اختیار معامله و تعیین ارزش حال آنهاست. در سال ۱۹۷۳ بلک- شولز و به‌طور جداگانه مرتن، روشی را برای محاسبه‌ی استراتژی پوشش ریسک فروش اوراق اختیار معامله‌ای ارایه کردند و نشان دادند که در مدل آنها همواره می‌توان ریسک فروش اختیار معامله را پوشش داد. در نتیجه‌ی تحقیقات مهم آنها در حدود بیست سال بعد در سال ۱۹۹۵ شولز و مرتن جایزه‌ی نوبل در اقتصاد را دریافت کردند. در این تحقیق بخشی به معرفی مفاهیم، کارکردها و انواع اختیار معامله اختصاص داده شده و در قسمت دیگر، به مدل‌های متداول در تعیین قیمت اختیار معامله اشاره شده و مبنای محاسباتی مدل‌های معمولی و مدل‌هایی که بر مبنای محاسبات تصادفی بنا شده‌اند شرح داده شده است.

کلمات کلیدی: اختیار معامله، پوشش، قیمت‌گذاری اختیار، مدل دوجمله‌ای، مدل پیوسته.

مقدمه

یک اختیار معامله[1]، قراردادی است که به دارنده‌ی آن اختیار خرید یا فروش دارایی ذکر شده در قرارداد در تاریخ مشخص و با قیمت معین از پیش‌تعیین شده‌ای را می‌دهد. تاریخ مشخص شده در قرارداد را تاریخ اعمال یا انقضا یا سررسید و قیمت را نیز قیمت اعمال می‌نامیم.

در مورد اختیار خرید[2] عمل‌کرد بدین ترتیب است: اگر قیمت نقدی دارایی مورد نظر در زمان اعمال، بالاتر از قیمت اعمال باشد، دارنده‌ی اختیار خرید، آن را به موقع اجرا گذاشته با قیمت اعمال کالا را می‌خرد. سپس در بازار به قیمت نقدی می‌فروشد و از این رهگذر، منفعت می‌برد. این در حالی است که اگر قیمت نقدی پایین‌تر از قیمت اعمال باشد، اختیار خرید را به حال خود رها می‌کند و از اعمال آن خودداری می‌نماید.

درمورد اختیار فروش[3]، دارنده‌ی آن اختیار دارد دارایی خود را در زمان آتی معینی با قیمت مشخص بفروشد. مثلاً فرض کنید که کشاورزی یک اختیار فروش روی قیمت ذرت خریداری کرده است. اگر در زمان اعمال، قیمت ذرت ناگهان سقوط کند و به زیر قیمت اعمال برسد، کشاورز می‌تواند اختیار فروش خود را اعمال کرده و به نوعی خود را در برابرکاهش قیمت بیمه کند. با این تعبیر می‌توان اختیار فروش را به‌عنوان بیمه‌کننده قیمت و ابزاری که کف و حداقلی را برای قیمت تعیین می‌کند در نظر گرفت. یک اختیار خرید زمانی اعمال می‌شود که قیمت نقدی پایین‌تر از قیمت اعمال باشد.

درحالی‌که خریدار اختیار حق دارد از اختیار خود استفاده بکند یا آن را اعمال نشده باقی بگذارد، صادرکننده‌ی این اختیار، اجباراً متعهد است که درصورتی‌که اختیار اعمال شد، تعهدات خود درباره‌ی خرید یا فروش کالا با قیمت تعیین شده را به معرض اجرا درآورد. به‌همین‌دلیل، منتشرکننده‌ی اختیار[4] عمدتاً در معرض خطر و زیان احتمالی با مبلغ نامحدود است. این در حالی است که زیان خریدار اختیار در بدترین حالت، منحصر به قیمتی است که جهت خریداری اختیار پرداخته است.

قیمتی را که خریدار باید جهت خریداری اختیار خرید یا فروش بپردازد[5] می‌توان نوعی حق بیمه تعبیر کرد که بابت انتقال ریسک به طرف مقابل، به وی پرداخت می‌گردد. بنابراین بایستی توجه کرد، که تعیین قیمت برای اختیار معامله پدیده‌ای به نسبت جدید بوده و بازار اختیار

---

[1] option
[2] call option
[3] put option
[4] seller, writer
[5] premium

معامله نیز بازاری کاملاً متفاوت از بازار کالا و خدماتی است که در آنها قیمت کالا یا خدمت خاصی تعیین می‌گردد. به همین دلیل نیز علم قیمت‌گذاری اختیار معامله، همان‌گونه‌که در این مقاله معرفی خواهد شد خود به یک دامنه‌ی بسیار وسیع و عمیق از علم اقتصاد و مالیه تبدیل شده است.

یک نکته‌ی اساسی که باید در مورد تعیین قیمت اختیار معامله در نظر داشت، نحوه‌ی پوشش ریسک[1] برای منتشر کننده‌ی آن است. منظور از پوشش ریسک این است که راه‌بردی اتخاذ نماییم که در صورت هرگونه نوسان بر روی قیمت دارایی ذکر شده در اختیار، قادر به ایفای تعهدات خود در هر نقطه‌ی زمانی که ممکن است اختیار اعمال شود، باشیم. اما نکته این است که، چنین راه‌بردی قطعاً از سرمایه‌گذاری در بازارهای مختلف و بر روی دارایی‌هایی که حرکات قیمت آنها بی‌ارتباط با دارایی مورد بحث ماست حاصل نخواهد شد. بلکه تنها راه ممکن و منطقی برای دست‌یابی به حالت خنثی نسبت به ریسک[2]، این است که پورتفولیوی متشکل از خود دارایی مورد بحث[3] (که ممکن است سهام، ارز و یا هر چیز دیگری باشد) و اختیار خرید یا فروش منتشر شده بر روی آن و سپرده‌ای که قادر به کسب بهره با نرخ بهره‌ی بدون ریسک است تشکیل دهیم. و ترکیب این پورتفولیو را به‌گونه‌ای شکل دهیم که مبنای آن مساوی بودن ارزش پورتفولیو با میزان تعهدمالی ایجاد شده در هر مقطع زمانی باشد. البته با تغییر قیمت دارایی پایه و نرخ بهره، ارزش پورتفولیو نیز به همراه میزان تعهد ایجاد شده تغییر خواهد کرد و باید استراتژی پوشش ریسک را به‌صورت پویا دنبال کرد و دائماً ترکیب بهینه را در پورتفولیو حفظ نمود. ضمناً این نکته که ارزش پورتفولیو در هر زمان باید مساوی با میزان تعهد ایجاد شده باشد، از ایجاد فرصت آربیتراژ نیز جلوگیری می‌کند و از این رو قیمت تعیین شده در این روش، قیمت آربیتراژ نامیده می‌شود.

اکنون می‌توانیم به تفاوت بارز قراردادهای اختیار معامله و قراردادهای بیمه اشاره کنیم. این دو مقوله، در تعاریف و کارکردها، شباهت‌های بسیاری دارند که به چند مورد اشاره خواهد شد. هر چند که تفاوت‌های این دو را می‌توان در موضوعاتی از قبیل نحوه‌ی مدل‌بندی مساله، تابع توزیع تغییرات قیمت، منشا ریسک و مسایل حقوقی جستجو کرد، اما تفاوتی که در اینجا به آن خواهیم پرداخت درباره‌ی نحوه تعیین قیمت آنهاست. به دلیل ماهیت بیمه، کالا یا دارایی پایه در بیمه، اغلب به‌گونه‌ای نیست که با تشکیل پورتفولیوی ذکر شده (متشکل از خود دارایی پایه، قرارداد

[1] hedging
[2] risk neutral
[3] underlying asset

بیمه و سپرده پولی) بتوان راه‌برد پوشش ریسک برای آن اتخاذ کرد. در مساله‌ی بیمه، شرکت بیمه‌کننده با پولی که به‌عنوان حق بیمه می‌گیرد، در بازارهای مختلف بر روی دارایی‌های مختلف سرمایه‌گذاری می‌کند تا بتواند در زمان آتی، خسارت احتمالی وارد شده را تامین مالی کند. اگر این سرمایه‌گذاری هوشمندانه باشد و احتمال در نظر گرفته شده برای بروز خسارت، با واقعیت منطبق در بیاید، این راه‌برد، موثر و مناسب ارزیابی می‌شود. در غیر این صورت شرکت بیمه متضرر می‌گردد. امّا مسأله پوشش ریسک در اوراق اختیار معامله، چنین است که پوشش دهنده‌ی ریسک، سرمایه‌ی نقدی خود را که از فروش این اوراق حاصل شده است، بر روی همان سهم یا کالایی که در مورد آن اختیار، منتشرکرده، سرمایه‌گذاری می‌کند، به‌گونه‌ای که نوسان‌های قیمت دارایی پایه، همان‌طورکه منشاء سود یا زیان وی در اختیار معامله‌ی صادر شده است، همزمان منشا تغییرات ارزش پورتفولیوی وی در جهتی باشد که همواره در هر زمان، دارایی شخص، برابر با مبلغ مورد تعهد وی گردد.

۱- انواع اختیار معامله

اختیارهای معامله را از جهات مختلفی می‌توان تقسیم‌بندی کرد. یک گروه از این تقسیم بندی‌ها بر حسب زمان اعمال آنهاست که از این نظر اختیارها به دو گروه اروپایی و آمریکایی تقسیم‌بندی می‌شوند. اختیارهایی که درست در زمان مشخص شده در قرارداد قابل اعمال هستند، اختیار اروپایی و اختیارهایی که در زمان سر رسید و در هر زمان قبل از زمان سررسید، قابل اعمال هستند، اختیار آمریکایی نامیده می‌شوند.

تقسیم‌بندی دیگری را می‌توان برمبنای ارزش اختیار صورت داد: اختیارهای سودآور[1]، اختیارهای سربه سر[2] و اختیارهای زیان‌ده[3].

در هر لحظه با توجه به قیمت نقدی و قیمت اعمال و قیمتی که برای خریداری اختیار، پرداخته شده است، می‌توان تعیین کرد که اختیار، جزء کدام گروه فوق در آمده است. قیمت پرداخت شده برای خرید یک اختیار که تعیین آن موضوع اصلی این مقاله است، بستگی به عواملی نظیر مدت زمانی که تا انقضا باقی است، نوسان‌پذیری قیمت دارایی پایه، قیمت فعلی بازار، قیمت اعمال و نرخ بهره‌ی بدون ریسک دارد. مدل‌هایی که برای تعیین این قیمت به‌کار می‌روند از قبیل مدل دوجمله‌ای، مدل بلک شولز، مدل شبکه‌ای و سایر مدل‌ها هر کدام گرچه راه‌بردهای متفاوتی،

---
[1] in the money
[2] at the money
[3] out of money

جهت مدل‌بندی و محاسبات اتخاذ کرده‌اند اما زیربنای همه‌ی آنها یکسان است. در نظرگرفتن قیمت خرید یک اختیار به‌عنوان نوعی حق بیمه، به ما کمک می‌کند تا این زیربنای واحد را به‌صورت شهودی لمس کنیم. مثلاً در بیمه‌کردن اتومبیل در مورد رانندگانی که سابقه‌ی تصادف اندکی دارند، جایزه پرداخت می‌شود و برای رانندگانی که سابقه‌ی تصادف و سوانح بالایی دارند، حق بیمه‌ی بیشتری مطالبه می‌شود. بنابراین طبیعی است که در مورد اختیارها هم، بیمه‌کردن قیمت، درحالی‌که قیمت، افت و خیزهای بسیار (یا اصطلاحاً نوسان‌پذیری[۱] بالا) دارد، گران‌تر از بیمه‌کردن قیمت در شرایطی باشد که نوسان‌ها اندک است. یا همچنان‌که بیمه اتومبیل به‌مدت ۲ سال، گران‌تر از بیمه‌ی یک ساله‌ی آن است، همراه با افزایش زمان باقی مانده تا انقضای یک اختیار، قیمت آن نیز بالاتر تعیین می‌شود.

تقسیم‌بندی دیگری از اختیارها را می‌توان برمبنای دارایی پایه (دارایی ذکر شده در قرارداد) صورت داد. چند نوع مهم از آنها به قرار زیر است:

- اختیار بر روی سهام[۲]
- اختیار بر روی ارزهای خارجی[۳]
- اختیار بر روی نرخ بهره[۴]
- اختیار بر روی شاخص[۵]

به‌وضوح هر یک از اختیارهای فوق، برای گروه‌های خاصی از یک جامعه جالب و مناسب هستند. مثلاً بانک‌ها که به دلیل مبادلات ارزی در معرض ریسک نوسان قیمت ارز هستند، می‌توانند با استفاده از اختیار بر روی ارزهای خارجی که به دارنده‌ی آن حق خرید یا فروش مقدار معینی ارز خارجی به ازای مقدار مشخصی از پول داخلی را می‌دهد، خود را نسبت به نوسان‌های مربوط به ارز بیمه کنند. این نوع خاص اختیار از آنجا که برای تمامی بانک‌ها، موسسات مالی و شرکت‌هایی که مبادلات ارزی دارند، جالب توجه است و بازار بسیار بزرگی را به‌خود اختصاص داده است. یکی از معروف‌ترین بازارهایی که در داد و ستد، آن فعالیت بالایی دارد، بورس اوراق بهادار فیلادلفیا است که از ۱۹۸۲ اختیار بر روی ارزهای خارجی در آن داد و ستد می‌شود.[۶]

[1] volatility
[2] stock option
[3] foreign currency option
[4] interest rate option
[5] index option
[6] Hul and options(1989)

اختیار بر روی نرخ بهره نیز، دارای انواع متنوع و متعددی است که هر یک به تناسب، نوعی از بیمه‌کردن در مقابل تغییرات افزایشی، کاهشی و یا در مقابل هرگونه تغییر را انجام می‌دهد و برای کلیه‌ی موسسات مالی، جالب و در حجم وسیع در حال مبادله است.

اغلب با ترکیب انواع مختلفی از اختیارهای ساده می‌توان به اختیارهای مرکب دست یافت که به تناسب مقصد و منظور هر استفاده‌کننده‌ای، کارایی لازم را داشته باشد. ازساده‌ترین این ترکیب‌ها می‌توان اختیار بر روی اختیار، استرادل[۱]، استرانگل[۲]، استریپ و استرپ[۳] را نام برد.

برای مشاهده‌ی نمونه‌ای از کارایی و تنوعی که این ابزارها به لحاظ کنترل ریسک و حصول بازده‌ی موردنظر ایجاد می‌کنند، خوب است از نحوه‌ی کارکرد یکی از اختیارهای فوق مثلاً استرادل ذکری به‌میان آید. استرادل ابزاری است که از ترکیب یک اختیار خرید و یک اختیار فروش بر روی یک سهم مشخص با قیمت اعمال و تاریخ اعمال یک‌سان حاصل می‌شود. استرادل ابزاری است مناسب برای سرمایه‌گذارانی که به هر دلیل، حدس می‌زنند که به‌زودی در قیمت آن سهم، اتفاق و تغییر شدیدی رخ خواهد داد، اما جهت این تغییر (افزایش یا کاهش) برایشان مشخص نیست. زمانی که شرکتی در شرف خریداری شدن از سوی شرکتی دیگر است و یا در نتیجه‌ی اقامه‌ی دعوا قرار است موضوع مهمی درباره‌ی شرکت به زودی اعلام شود، احتمال نوسان‌های شدید در قیمت سهام شرکت بسیار بالاست، اتخاذ راه‌برد استرادل می‌تواند به‌خوبی از سرمایه‌گذار حفاظت کند.

در مثال زیر می‌توان این اثر محافظتی را توصیف کرد: فرض کنید قیمت سهم مشخصی اکنون ۶۹ دلار است و حدس زده می‌شود که، در سه ماه آینده نوسان‌های فوق‌العاده‌ای در پیش است. بنابراین سرمایه‌گذار با خرید یک اختیار خرید و یک اختیار فروش با قیمت اعمال ۷۰ دلار و با انقضای سه ماهه، از راه‌برد استرادل استفاده می‌کند. فرض کنید هزینه‌ی اختیار خرید ۴ دلار و هزینه‌ی اختیار فروش ۳ دلار باشد (که در مورد چگونگی تعیین این قیمت‌ها بعداً توضیح داده خواهد شد). بنابراین هزینه‌ی این استرادل ۷ دلار است. حال در هر یک از حالت‌های افزایش یا کاهش قیمت، سود و یا زیان شخص قابل محاسبه است:

اگر قیمت به ۵۵ دلار نزول کند، اختیار خرید بدون اعمال به حال خود رها می‌شود و در عوض از ناحیه اختیار فروش، ۱۵ دلار سود عاید می‌شود و با کم کردن ۷ دلار اولیه، ۸ دلار سود خالص به دست می‌آید. در مورد چند تغییر دیگر، نتایج در جدول زیر خلاصه شده است:

---
[1] Straddle
[2] Strangle
[3] Strip & Strap

قیمت پس از سه ماه	۵۵	۶۹	۷۰	۹۰
سود و زیان حاصل	+۸$	-۶$	-۷$	+۱۳$

درهرحال، حداکثر زیان سرمایه‌گذار به‌اندازه‌ی قیمت خرید استرادل یعنی، ۷ دلار خواهد بود و آن در حالتی است که قیمت نقدی با قیمت اعمال یکی باشد، یعنی حدس سرمایه‌گذار درباره‌ی نوسان‌های شدید، به‌کلی اشتباه از کار در بیاید. و هر چه نوسانات قیمت شدیدتر باشد سود بیشتری عاید سرمایه‌گذار خواهد شد[1].

به‌عنوان مثال اگر یک نهاد مالی مانند، بانک، یک وام خارجی به پوند دریافت کرده باشد و قرار باشد آن را با نرخ بهره‌ی لایبور[2] بازپرداخت کند، علاوه بر این که درمعرض خطر نوسان‌های قیمت پوند (نرخ تبدیل پوند به ریال) است، باید نگران نوسان‌های لایبور نیز باشد. این نگرانی دوم را می‌توان با خرید اختیار بر روی نرخ بهره، برطرف کرد و نرخ بهره‌ی متغیر لایبور را تبدیل به نرخ بهره‌ای ثابت کرد.

۲- اهمیت و نقش اختیار معامله

یک سوال منطقی که ممکن است به ذهن برسد این است که، ضرورت استفاده از قراردادهای اختیار معامله در چیست و مزیت آنها بر خرید خود سهام کدام است؟ برای پاسخ به این سوال خوب است، مثالی را مورد تامل قرار دهیم[3]: فرض کنید با ۷۰۰۰ $ قصد تشکیل پورتفولیو از سهام IBM یا اختیار خرید بر روی سهام IBM یا سپرده‌ی بانکی داشته باشیم. سه سناریوی زیر را در نظر بگیرید:

۱- خرید ۱۰۰ سهم IBM هر یک به مبلغ ۷۰$ (فرض می‌کنیم IBM در طول ۶ ماه هیچ سودی تقسیم نمی‌کند).

۲- خرید ۱۰۰۰ اختیار خرید روی سهام IBM با قیمت اعمال ۷۰$ با انقضای ۶ ماهه در قالب ۱۰ قرارداد (هر قرارداد روی ۱۰۰ سهم بسته می‌شود) با قیمت هر اختیار خرید ۷$.

---
1 Hull and Options (1989)
2 libor
3 Bodie, Kane, and Marcus(1996)

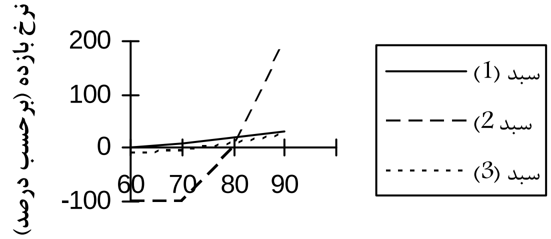
۳- خرید ۱۰۰ اختیار به مبلغ ۷۰۰$ و سپرده‌گذاری مابقی پول (۶۳۰۰$) در حساب سپرده‌ی ۶ ماهه با نرخ بهره‌ی بدون ریسک سالیانه ۶٪.

پس از گذشت ۶ ماه، به نسبت تغییرات قیمت سهام IBM، ارزش هر یک از سبدهای فوق قابل محاسبه است:

قیمت سهام IBM **ارزش سبد**	$۵۰	$۶۰	$۷۰	$۸۰	$۹۰
سبد (۱): ۱۰۰٪ سهام	$۵۰۰۰	$۶۰۰۰	$۷۰۰۰	$۸۰۰۰	$۹۰۰۰
سبد(۲): ۱۰۰٪ اختیار خرید	$۰	$۰	$۰	$۱۰۰۰۰	$۲۰۰۰۰
سبد(۳): ترکیبی از اختیار خرید و سپرده	$۶۴۸۹	$۶۴۸۹	$۶۴۸۹	$۷۴۸۹	$۸۴۸۹

و نرخ بازده‌ی هر یک از سبدها در هر یک از حالات را نیز می‌توان به‌دست آورده نسبت به تغییرات قیمت رسم کرد:

قیمت سهام IBM **ارزش سبد**	$۵۰	$۶۰	$۷۰	$۸۰	$۹۰
سبد (۱)	-۲۸/۶٪	-۱۴/۳٪	۰٪	۱۴۷/۳٪	۲۸/۶٪
سبد(۲)	-۱۰۰٪	-۱۰۰٪	-۱۰۰٪	۴۳/۳٪	۱۸۵/۷٪
سبد(۳)	-۷/۳٪	-۷/۳٪	-۷/۳٪	۷٪	۲۱/۳٪



قیمت سهام (برحسب دلار)

با مقایسه‌ی اعداد و شیب نمودارها مشاهده می‌شود که، استفاده از اختیارها دو ویژگی مهم را می‌تواند به‌دنبال داشته باشد:

- آنها به ما اختیار استفاده از قدرت اهرم[1] می‌دهند. چرا که ارزش آنها بیش از حد با تغییرات ارزش سهام، بالا و پایین می‌شود و همین ضریب بزرگ برای فعالان بازار بورس کاملاً جالب و قابل توجه است.
- اگر اختیار خرید با سپرده ترکیب شود (مانند سبد۳)، می‌توان ریسک را نسبت به حالتی که فقط سهام در سبد داریم کاهش داد و به‌نوعی سبد را بیمه نمود. پس با تغییردادن نسبت سپرده و سهام و اختیار خرید یا فروش در سبد می‌توان راهبرد مناسب جهت مدیریت ریسک را اتخاذ نمود[2].

مثال فوق که فاقد هرگونه پیچیدگی ابزاری و محاسباتی بود، اساسی‌ترین ویژگی اختیارها را توصیف کرد. اما واقعیت این است که در دنیای حاضر ابزارهایی با تنوع و پیچیدگی زیاد برای انواع بازارها با انواع الگوهای افت و خیز قیمت و انواع سلیقه‌های شخصی در مدیریت ریسک ایجاد شده و در حال مبادله در اندازه‌های بزرگ است.

مبادله‌ی اختیار معامله روی سهام در ۱۹۷۵ در بورس سهام امریکا[3] و بورس فیلادلفیا[4] راه‌اندازی شد. به‌طوری‌که در اوایل دهه‌ی هشتاد حجم معاملات اوراق اختیار معامله با رشد نجومی از حجم معاملات روزانه‌ی خود سهام در بورس سهام نیویورک پیشی گرفت. در همین دهه بود که درامریکا بازارهایی برای مبادله‌ی اختیار روی ارز، شاخص سهام و قراردادهای آتی ایجاد شد.

حتی در سال‌های اخیر که ابزارهای مشتقه‌ی مالی به ابزاری استاندارد تبدیل شده و رشد نمایی اولیه‌ی خود را از دست داده‌اند، باز شاهد رشد ۷۴ درصدی حجم مبادله شده‌ی این قراردادها بین سال‌های ۲۰۰۱ تا ۲۰۰۴ بوده‌ایم. در این میان حجم مبادله‌ی اختیار معامله همواره رو به افزایش و اغلب بین ۲۵ تا ۳۰ درصد حجم کل مبادلات ابزارهای مشتقه‌ی مالی بوده است:

[1] leverage
[2] Bodie, Kane, and Marcus (1996)
[3] amex
[4] phlx

حجم مبادلات ابزارهای مشتقه آمریکا (برحسب میلیارد دلار)					
	دسامبر ۲۰۰۳	ژوئن ۲۰۰۴	دسامبر ۲۰۰۴	ژوئن ۲۰۰۵	دسامبر ۲۰۰۵
کلیه‌ی‌قراردادهای مشتقه‌ی مالی	۲۴۴۷۵	۲۶۹۹۷	۲۶۲۸۹	۳۱۰۸۱	۳۱۶۰۹
قراردادهای آتی و معاوضات	۱۸۷۵۸	۲۰۹۵۹	۲۳۱۷۴	۲۴۰۳۶	۲۴۴۱۶
اختیار معامله	۵۷۱۷	۶۰۳۸	۶۱۱۵	۷۰۴۵	۷۱۹۳

Bank for international settlements.

هرکه صحبت از اهمیت موضوع یا ابزار خاصی در میان باشد، مرسوم است که جدول‌هایی حاوی ارقام در حال رشد و یا نمودارهایی که روند صعودی موضوع مورد بحث را نشان می‌دهد، ارایه شود و با ذکر درصدها و آمار چندساله، رشد فزاینده‌ی استفاده از ابزار موردنظر گوشزد شود.

هر چند که در صحت آمار و ارقام و اهمیت آنها در قبول ادعای مورد بحث، تردیدی نیست اما راه دیگری هم برای خاطر نشان‌کردن اهمیت یک ابزار متصور است و آن این است که سیر تحول کیفی آن ابزار در طول چند دهه‌ی اخیر را مدنظر قرار دهیم.

به‌عنوان مثال ابزاری مانند، اختیار بر روی نرخ بهره، هم موردنظر حجم گسترده‌ای از سرمایه‌گذارانی است که با توجه به قدرت پیش‌بینی خود از حرکات بازار قصدکسب سود از این ابزار را دارند و هم به‌شدت مورد توجه شرکت‌ها و موسسات مالی است که مایلند ریسک ناشی از نرخ بهره را تحت کنترل خود درآورند. به همین دلیل تحولات کیفی بسیاری در این ابزار به چشم می‌خورد که می‌توان بی‌اغراق آنرا با تحولات کیفی اختراعی نظیر کامپیوتر در چند دهه‌ی اخیر مقایسه نمود. تاکنون چندین نسل از این ابزار در بازارهای اروپایی و امریکایی ایجاد شده است که هر کدام نسبت به نسل گذشته خود اختلافی مانند نسل‌های مختلف کامپیوتر دارند. این خود می‌تواند بیان کننده‌ی وسعت استفاده و کارایی ابزار یاد شده باشد[1].

۳- مدل دوجمله‌ای قیمت‌گذاری سهام

در این مدل تغییرات قیمت بازار سهام در واحدهای زمانی گسسته صورت می‌گیرد، فرض می‌شودکه در هر واحد زمانی برای قیمت دو انتخاب وجود خواهد داشت. قیمت اولیه سهام (در

[1] Ricardo (1999)

زمان صفر) را با S_0 نمایش می‌دهیم. دو عدد مثبت نیز وجود دارند: $0<d<u$، به این ترتیب که قیمت سهام، در زمان یک، یا برابر dS_0 و یا برابر uS_0 خواهد بود. تغییرات قیمت سهام در زمان‌های مختلف را با پرتاب یک سکه (به‌عنوان مثال ساده از یک توزیع احتمال) مشخص می‌کنیم. اگر سکه H آمد، قیمت سهام برابر است با $S_1(H)= uS_0$ و اگرسکه T آمد، قیمت سهام برابر است با $S_1(T)= dS_0$. به‌همین ترتیب برای زمان دوم هم سکه می‌اندازیم (شکل زیر) و این کار را برای زمان‌های بعدی نیز ادامه می‌دهیم.

$$
\begin{tikzcd}
 & & S_2(HH) = u^2S_0 \\
 & S_1(H) = uS_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(HT) = udS_0 \\
S_0 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & S_2(TH) = duS_0 \\
 & S_1(T) = dS_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(TT) = d^2S_0
\end{tikzcd}
$$

حال فرض کنید کلاً n بار سکه می‌اندازیم. تمام حالت‌های ممکن تغییرات قیمت بازار سهام یک مجموعه 2^n عضوی خواهد بود. این مجموعه تمام رخدادهای ممکن در بازار را در بر دارد و آن را با Ω نمایش می‌دهیم. یک نقطه دل‌خواه از Ω را با $\omega= (\omega_1,..., \omega_n)$ نمایش می‌دهیم که در آن ω_k معرف رخداد سکه در زمان k-ام است، $\omega_k\in\{H,T\}$. قیمت در زمان k-ام در بازار سهام، S_k، تابعی از ω خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت $S_k(\omega)$. همچنین یک بازار پولی با نرخ بهره r نیز در نظر می‌گیریم (یک واحد پولی سرمایه‌گذاری در بازار پولی در واحد زمانی بعد $1+r$ واحد پولی و بدون ریسک بازگشت خواهد داشت). همچنین فرض می‌کنیم: $d<1+r<u$، درصورتی‌که شرط اخیر صدق نکند سرمایه‌گذاری در یکی از بازارهای سهام و یا بازار پولی اتفاق نخواهد افتاد. حال تحت فروض عمومی مذکور، مثال‌های زیر را در مورد تعیین قیمت اختیار معامله‌ی سهم مورد نظر بررسی می‌کنیم[1].

مثال۳-۱- یک اختیار خرید اروپایی[2] با قیمت توافقی $k>0$ و زمان سررسید ۱ را در نظر می‌گیریم. این اختیار خرید، اجازه خرید سهام (بدون الزام) در زمان ۱ با قیمت k را به ما می‌دهد. بنابراین ارزش این اختیار در زمان ۱ برابر است با S_1-K. قرار می‌دهیم $V_1(\omega_1) = (S_1(\omega_1)-K)^+ =$

[1] Hunt and Kennedy (2000)
[2] European call option

$\max\{S_1(\omega_1)\text{-}K, 0\}$، و به آن ارزش اختیار خرید در زمان سررسید معامله می‌گوییم. هدف اولیه ما محاسبه قیمت آربیتراژ (ارزش حال) این اختیار خرید در زمان صفر است. فرض کنید یک سرمایه-گذار در زمان صفر اختیار خرید را به ارزش حال V_0 می‌فروشد. اکنون الزامی برای پرداخت $V1(\omega1)$ در زمان ۱ دارد. از آنجا که نمی‌داند در زمان ۱ چه اتفاقی رخ خواهد داد، ($\omega1$ مجهول) برای پوشش ریسک این معامله به تعداد Δ_0 سهم از بازار سهام خریداری می‌کند. ارزش پورتفولیوی این شخص در زمان ۱ عبارتست از: $X1(\omega1) = \Delta0S1(\omega1) + (1+r)\ (V0 - \Delta0S0)$. برای آنکه بتواند الزام V_1 را پوشش دهد باید داشته باشیم:

$$V_1(\omega_1) = X_1(\omega_1).$$

با قراردادن $\omega_1 = H,T$ دو معادله به‌دست می‌آید که با حل آنها به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta_\circ = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)},$$

$$V_\circ = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)\right]$$

درمعادله‌ی بالا $\tilde{p} = \dfrac{1+r-d}{u-d}, \tilde{q} = 1-\tilde{p}$ می‌باشد. می‌توان این دو مقدار را احتمال وقوع H و T تعبیرکرد. این احتمال اصطلاحاً «بی‌تفاوت نسبت به ریسک» است[1]. البته این اندازه احتمال هیچ ارتباطی با احتمال وقوع واقعی H و T ندارد.

درمثال قبل نکته اصلی این است که ثروت ناشی از فروش اختیار خرید در زمان سررسید می‌بایست قادر به پوشش تعهد ناشی از فروش آن باشد (و نه بیشتر). این مطلب درحالت کلی نیز صادق است. اگر منظور از X_k $(k \leq n)$ ثروت ناشی از فروش یک اختیار خرید با زمان سررسید n باشد و V_k ارزش اختیار معامله در زمان k در این صورت یک پوشش ریسک که قیمت آربیتراژی را برای این اختیار تولید می‌کند، می‌بایست در شرط $X_k=V_k$ صدق کند. چرا که اگر $X_k > V_k$ در این صورت فرصت آربیتراژی برای فروشنده اختیار معامله به‌وجود می‌آید[2].

1 risk-neutral probability
2 Shreve (1997)

مثال ۳-۲- یک اختیار خرید اروپایی با زمان سررسید n را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ارزش اختیار معامله در زمان سررسید V_n است. یک پوشش ریسک[1] برای این اختیار عبارتست از یک دنباله پوشش ریسک $(\Delta_0,\dots,\Delta_{n-1})$ و یک دنباله ثروت، $(X_0,\dots,X_n)$ به‌طوری‌که در هر زمان $0 \le k \le n$ و برای هر $k = (\omega_1,\dots,\omega_k)$ داشته باشیم:

(۱)

$$X_k(\tilde{\omega}_k) = \Delta_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1})S_k(\tilde{\omega}_k) + (1+r)(X_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1}) - \Delta_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1})S_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1})).$$

با تشکیل معادله بالا برای $\omega_k = H, T$ و حل این دو معادله خواهیم داشت:

$$\Delta_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1}) = \frac{X_k(\tilde{\omega}_{k-1}H) - X_k(\tilde{\omega}_{k-1}T)}{S_k(\tilde{\omega}_{k-1}H) - S_k(\tilde{\omega}_{k-1}T)} \qquad (۲)$$

$$X_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1}) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_k(\tilde{\omega}_{k-1}H) + \tilde{q}X_k(\tilde{\omega}_{k-1}T\right] \qquad (۳)$$

نکته‌ها:

- معادلات بالا یکسری معادلات بازگشتی معکوس هستند. بنابراین برای محاسبه تابع Δ_{k-1} نیازمندیم ابتدا تابع X_k را در همه نقاط $\tilde{\omega}_k$ محاسبه کنیم. در نتیجه برای محاسبه ارزش چنین اختیار خریدی $(V_0 = X_0)$ نیاز به $2n+1$ محاسبه است. به‌عنوان مثال اگر ۶۳= n (یک اختیار خرید سه ماهه) دراین‌صورت تعداد محاسبات لازم برای ارزش‌گذاری این اختیار خرید عددی حدوداً ۱۷ رقمی خواهد بود. این مساله بسیار مهم است و در حقیقت لزوم تلاش برای مدل بندی‌های کارآمدتر برای حل مساله ارزش‌گذاری اختیار معامله را روشن می‌سازد.
- در معادلات بالا هیچ نوع شرط خاص بر روی تابع قیمت توافقی V_n اعمال نشده است و این معادلات برای هر نوع تابع قیمت توافقی برقرار است.
- معادلات بالا نشان می‌دهندکه، برای محاسبه X_{k-1} نیازمند تابع X_k هستیم که خود تابعی از $\tilde{\omega}_k$ است. از طرف دیگر X_{k-1} تنها تابعی از $\tilde{\omega}_{k-1}$ است و نه $\tilde{\omega}_k$. نکته در اینجاست که، برای محاسبه $X_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1})$ از نوعی انتگرال‌گیری بر روی همه مقادیر

[1] hedging

مرحله K-ام فضای حالات با فرض آنکه در مرحله k-1-ام حالت $\tilde{\omega}_{k-1}$ رخ داده است استفاده شده.

- معادلات بالا مستقل از تابع اندازه احتمال واقعی H,T به‌دست آمده است. بنابراین برای هر نوع احتمال وقوع H,T برقرار است. دلیل این مساله این است که اساساً روش محاسبه قیمت آربیتراژ ما مبتنی بر این بود که مستقل از آنکه H اتفاق می‌افتد با T، ریسک اختیار معامله را پوشش دهیم.

درعمل معمولاً هنگام استفاده از مدل‌های دوجمله‌ای فرض می‌شود که حرکت‌های قیمت سهام در فاصله‌ی کوتاه‌مدت به‌صورت دو شاخه‌ای است. معمولاً طول عمر اختیار معامله را به تعداد زیادی فاصله زمانی کوتاه‌مدت تقسیم می‌کنند به‌طوری‌که در هر دوره‌ی زمانی، این فرض که قیمت گره قبلی در u یا d ضرب می‌شود برقرار باشد. با تقسیم طول عمر یک اختیار معامله به۳۰ فاصله زمانی، ۳۱ قیمت نهایی و $۲^{۳۰}$(حدود یک میلیون) مسیراحتمالی قیمت وجود خواهد داشت.

کاکس، راس و رابینشتاین نشان دادند که می‌توان فاکتورهای u و d را با توجه به نوسان پذیری قیمت سهام (σ) و طول هریک از بازه‌های زمانی تقریب زد[۱]:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta_t}}, d = \frac{1}{u}$$

که در آن δ_t کسری از یک سال است که طول هر یک از بازه‌های زمانی از یک گره تا گره دیگر را دربر می‌گیرد.

اغلب دیده می‌شود که نرخ بهره‌ی بدون ریسک به‌صورت مرکب پیوسته فرض می‌شود. دراین‌صورت در کلیه‌ی محاسبات فوق به‌جای فاکتور رشد که (1+r) در محاسبات منظور شده، باید $e^{r\delta t}$ منظور شود و در نتیجه فرمول $\tilde{p}$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\tilde{p} = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$$

مثال۳-۳- یک اختیار فروش آمریکایی پنج ماهه منتشر شده را بر روی سهامی که سود نمی‌پردازد، در نظر بگیرید. فرض کنید قیمت جاری سهام ۵۰ دلار، قیمت اعمال ۵۰ دلار، نرخ

[1] Hull (1989)

بهره‌ی بدون ریسک سالیانه ٪۱۰ و میزان نوسان‌پذیری قیمت سهام نیز سالیانه ٪۴۰ باشد. به این ترتیب خواهیم داشت:

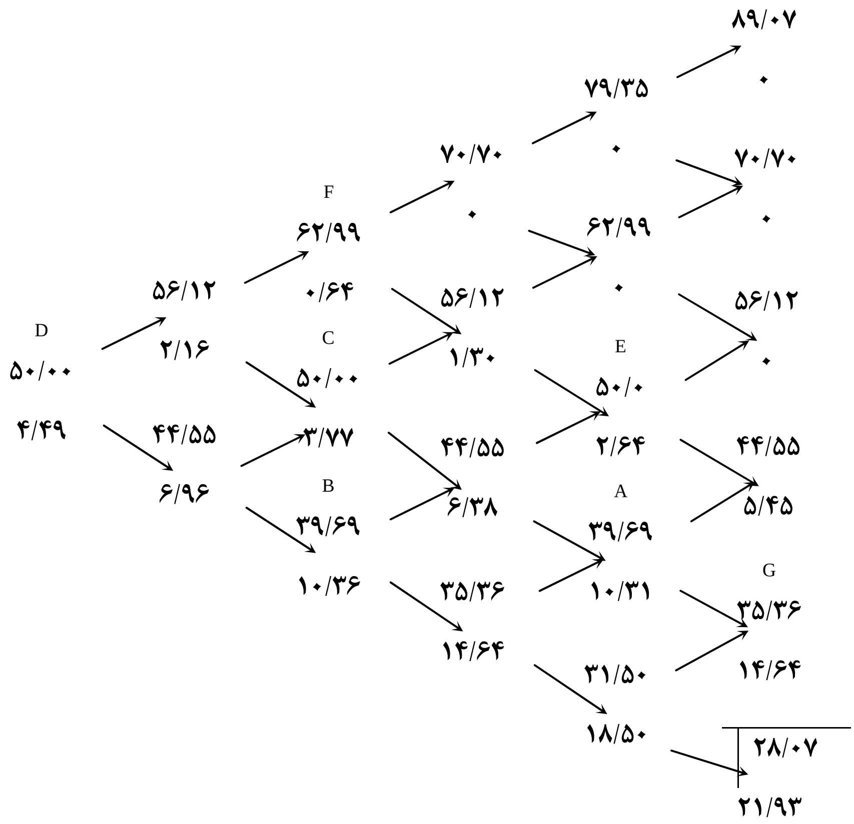
$$S_0=۵۰ \text{ و } k=۵۰ \text{ و } r=۰/۱$$

فرض کنید طول عمر اختیار معامله‌ی مذکور را به پنج فاصله‌ی زمانی (جهت سهولت محاسبه) به طول یک ماه، تقسیم کرده باشیم، با استفاده از محاسبات فوق در هرگره قیمت سهام و قیمت اختیار معامله را محاسبه کرده‌ایم:

$$S_t = \frac{1}{12}, u = e^{\sigma\sqrt{S_t}} = 1/1224$$

$$, \tilde{p} = \frac{e^{r\delta_t} - d}{u - d} = 0/5073 \quad ,1-\tilde{p} = ۰/۴۹۲۷$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{S_t}} = ۰/۸۹۰۹$$



مثلاً قیمت اختیار معامله در گره E از طریق زیر محاسبه شده است:

$$(۰/۵۰۷۳\times ۰ + ۰/۴۹۲۷ \times ۵/۴۵)e^{-۰/۱\times\frac{۱}{۱۲}} = ۲/۶۶$$

درگره E اعمال زودتر از موعد اختیار باعث می‌شود که قیمت آن برابر 0 گردد. زیرا در گره مزبور قیمت سهام و قیمت اعمال هردو برابر با ۵۹$ است. بنابراین مقدار صحیح قیمت اختیار معامله درگره E برابر با ۲/۶۶ دلار است.

به‌همین ترتیب، قیمت اختیار در سایرگره‌ها را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که اعمال زودتر از موعد اختیار در صورت‌دارا بودن ارزش پولی، همیشه بهترین راه به‌شمار نمی‌آید. مثلاً در گره B، در صورت اعمال، ارزش اختیار معامله بالغ بر ۱۰/۳۱ دلار (۳۹/۶۹-۵۰) خواهد شد. با این وجود اگر اختیار مزبور را اعمال نکرده و نگه داریم، ارزش آن برابر خواهد بود با:

$$(۰/۵۰۷۳ \times ۶/۳۸ + ۰/۴۹۲۷ \times ۱۴/۶۴)e^{-۰/۱\times\frac{۱}{۱۲}} = ۱۰/۳۶$$

بنابراین در این گره نباید اختیار معامله را اعمال نمود. قیمت صحیح اختیار در این گره ۱۰/۳۶$ می‌شود.

با انجام عملیات عقب‌گرد[1] بر روی درخت در خواهیم یافت که قیمت اختیار، در گره آغازین برابر با ۴/۴۹ دلار است. در عمل از بازه‌های زمانی کوچک‌تر و تعداد گره‌های بیشتر استفاده می‌شود. با استفاده از نرم افزارهایی مانند Deriva Gem می‌توان نشان داد که با انتخاب ۳۰، 50، ۱۰۰ ، ۵۰۰ مرحله زمانی، ارزش اختیار معامله به‌ترتیب ۴/۲۶۳، ۴/۲۷۲، ۴/۲۷۸، ۴/۲۸۳ می‌شود[2].

۴- مدل دو جمله‌ای در قالب احتمالاتی

یکی از مدل‌هایی که همواره در بحث قیمت‌گذاری نظریه اختیار از آن یاد می‌شود، مدل بلک- شولز است. همچنان که ذکر شد، این مدل برای ایشان و مرتن جایزه نوبل به‌همراه آورد (البته بلک به هنگام اعطای جایزه در گذشته بود.

اساس این مدل ره‌یافتی احتمالاتی به‌مدل دو جمله‌ای است. به این ترتیب که معادله بازگشتی عقب‌گرد یاد شده را با یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی جای‌گزین می‌کند. و به‌جای این فرض که قیمت در هر بازه ضریبی معادل u یا d می‌خورد، بازه‌های زمانی را در حد دیفرانسیلی کوچک اختیار کرده با استفاده از مدل‌های قدیمی‌تر فراگرد تغییر قیمت را نوعی حرکت براونی

---

[1] back ward

[2] Hull and Options (1989)

تعبیر کردند. حل معادله‌ی دیفرانسیل حاصل جای‌گزین حل 2^n معادله‌ی مدل قبلی است. اما در حالت کلی نظریه‌ای برای انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل تصادفی موجود نیست. خوشبختانه نظریه‌ی کاملی برای انتگرال‌گیری یا حل معادلات دیفرانسیل تصادفی با انتگرال‌ده حرکت براونی توسط ایتو در دهه‌ی ۳۰ میلادی معرفی شده بود. این نظریه مبنای حل معادله‌ی دیفرانسیل مدل بلک- شولز قرار گرفت[1].

تحت مفروضاتی از قبیل؛ ثابت‌بودن نوسان‌پذیری (σ) و نرخ بهره (r) جواب صریحی برای یافتن قیمت اختیار خرید و اختیار فروش به‌دست آمد که از قرار زیر است.

دریک اختیار معامله‌ی اروپایی بر روی سهامی که سود پرداخت نمی‌کند قیمت اختیار عبارت است از:

قیمت اختیار خرید $= c = S_0N(d_1)-ke^{-rT}N(d_2),$

قیمت اختیار فروش $= p = Ke^{-rT}(-d_2)-S_0N(-d_1).$

که در هر دوی این روابط T مدت زمان تا انقضاء به‌صورت کسری از سال، K قیمت اعمال، S_0 قیمت فعلی، r نرخ بهره‌ی بدون ریسک به‌صورت مرکب پیوسته، $N(x)$ تابع توزیع احتمال تجمعی یک متغیر با توزیع نرمال استاندارد و داریم:

$$d_۱ = \frac{Ln(\frac{S_۰}{k}) + (r + \frac{\sigma^۲}{۲})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d۲ = \frac{Ln(\frac{S_۰}{k}) + (r - \frac{\sigma^۲}{۲})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

مثال ۴-۱- قیمت فعلی سهامی ۴۲$ است. اختیار خرید اروپایی منتشرشده روی سهام مذکور با انقضای ۶ ماهه و قیمت اعمال ۴۰$ را در نظر بگیرید. اگر نرخ بهره بدون ریسک، سالیانه ٪۱۰ باشد و نوسان‌پذیری سالانه ٪۲۰ فرض شود، قیمت اختیار را بیابید.

$$d_۱ = \frac{Ln(\frac{۴۲}{۴۰}) + (۰/۱ + \frac{(۰/۲)^۲}{۲}) \times ۰/۵}{۰/۲\sqrt{۰/۵}} = ۰/۷۶۹۳$$

[1] Black (1973), Merton (1973)

$$d_{۲} = \frac{Ln(\frac{۴۲}{۴۰})+(۰/۱-\frac{(۰/۲)^{۲}}{۲})\times ۰/۵}{۰/۲\sqrt{۰/۵}}$$

$$Ke^{-rT} = ۴۰e^{-۰/۱\times ۰/۵} = ۳۸/۰۴۹$$

درنتیجه:

ارزش اختیار خرید $= ۴۲N(۰/۷۶۹۳) - ۳۸/۰۴۹\ N(۰/۶۲۷۸) = ۴/۷۶$

اگر در همین مثال به‌جای اختیار خرید، اختیار فروش را در نظر بگیریم:

ارزش اختیار فروش $= -۴۲N(-۰/۷۶۹۳) + ۳۸/۰۴۹N(۰/۶۲۷۸) = ۰/۸۱$

بنابراین با چشم‌پوشی از ارزش زمانی پول، برای رسیدن به نقطه‌ی سر به سر برای خریداری اختیار خرید، لازم است که قیمت سهام ۲/۷۶$ افزایش یابد و نقطه‌ی سر به سر برای خریدار اختیار فروش زمانی حاصل می‌شود که قیمت سهام ۲/۸۱ دلار کاهش یابد.[1]

در ره‌یافت احتمالاتی برای حل مساله ارزش‌گذاری، توابع S_k به‌عنوان متغیرهای تصادفی (توابع از Ω به R) در نظر گرفته می‌شوند. دراین قسمت نیاز به مفاهیم احتمالاتی نظیر: امیدشرطی،مارتینگل، فراگرد مارکوف، فیلترسازی، معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی، حرکت براونی و انتگرال ایتو داریم.[۲] برای جزئیات بیشتر می‌توان به اکسندال(۲۰۰۰)[۳] مراجعه نمود.

یک فراگرد سرمایه‌گذاری[۴] عبارتست از $\Delta = (\Delta_0,\ldots,\Delta_{n-1})$ که در آن:

- Δ_k تعداد سهام از بازار سرمایه است که در زمان k دارا هستیم.
- هر Δ_k، F_k- اندازه‌پذیر است.

درمدل دو جمله‌ای، از فرض F_k- اندازه‌پذیری Δ_k نتیجه می‌گیریم که اطلاعات موجود از نوسان‌های قیمت تا زمان k-ام استراتژی ما را برای خرید سهام در مرحله k-ام مشخص می‌کند و این استراتژی تابع تغییرات بعدی بازار نیست.

تعریف۴-۲- (ثروت فراگرد سرمایه‌گذاری Δ[۵]) ثروت حاصل از یک فراگرد سرمایه‌گذاری نیز یک فراگرد تصادفی است که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

[1] Hull (1989)

[۲] برای آشنایی با تعاریف و قضایای مورد نیاز، خواننده‌ی محترم می‌تواند به اکسندال(۲۰۰۰) و دلبین(۱۹۹۶) مراجعه نماید.

[3] Oksendal (2000)

[4] portfolio process

[5] self-financing portfolio process Δ

- با ثروت اولیه X_0 شروع می‌کنیم.
- به‌صورت استقرایی تعریف می‌کنیم:

$$X_{k+1}= \Delta_k S_{k+1}+(1+r)(X_k-\Delta_k S_k)= (1+r) X_k+\Delta_k(S_{k+1}-(1+r)S_k).$$

توجه کنید که بنا برتعریف X_k، F_k- اندازه‌پذیر است.

قضیه۴-۳- درفضای $(\Omega, F, \tilde{P})$ فراگرد تصادفی $\{(1+r)^{-k} X_k, F_k\}_{k=0}^{n}$ یک مارتینگل است.

اثبات: بنابر معادله‌ی (3) داریم:

$$X_{k-1}(\tilde{\omega}_{k-1}) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}X_k(\tilde{\omega}_{k-1}H) + \tilde{q}X_k(\tilde{\omega}_{k-1}T)\right]$$

که این دقیقاً معادل شرط مارتینگل است.

تعریف۴-۴- یک اختیار معامله اروپایی با زمان سررسید m عبارتست از؛ یک متغیر تصادفی F_m–اندازه‌پذیر V_m. می‌گوییم یک اختیار معامله اروپایی قابل پوشش است[1]، اگر مقدار ثابت X_0 و یک فراگرد سرمایه‌گذاری $\Delta= (\Delta_0,\ldots,\Delta_{n-1})$ موجود باشد که ثروت فراگرد سرمایه‌گذاری نظیر در رابطه $X_m(\omega)= V_m(\omega),\ \omega\in \Omega$ صدق کند.

به‌عنوان یک نتیجه از قضیه فوق داریم:

نتیجه۴-۵- اگر یک اختیار معامله اروپایی V_m قابل پوشش باشد، دراین‌صورت برای هر $k=0,\ldots,m$، قیمت آربیتراژ V_m در زمان k برابر است با:

$$(1+r)^k E((1+r)^{-m}V_m \mid F_k).$$

این قیمت را با V_m نمایش می‌دهیم.

قضیه۴-۶- مدل دوجمله‌ای یک اختیار معامله اروپایی دل‌خواه قابل پوشش ریسک است.

به این ترتیب که قرار می‌دهیم:

$$X_k(\omega_1,\ldots,\omega_k)= (1+r)^k E((1+r)^{-m}X_m \mid F_k)(\omega_1,\ldots,\omega_k),$$

$$\Delta_k(\omega_1,\ldots,\omega_k) = \frac{X_{k+1}(\omega_1,\ldots,\omega_k,H) - X_{k+1}(\omega_1,\ldots,\omega_k,T)}{S_{k+1}(\omega_1,\ldots,\omega_k,H) - S_{k+1}(\omega_1,\ldots,\omega_k,T)}$$

---

[1] hedgeable

باشروع از ثروت اولیه $X_0=E((1+r)^{-m}V_m)$، ثروت فراگرد سرمایه‌گذاری $\Delta_0,\dots,\ \Delta_{m-1}$ برابر فراگرد $X_0,\dots,\ X_m = X_m$ خواهد بود.

اثبات قضیه بالا اساساً همانند مثال(۳-۲) دربخش قبل است. صورت‌بندی مساله به زبان احتمالاتی امکان استفاده از فرض‌های احتمالاتی و کلیت بخشیدن به‌مساله را فراهم می‌سازد.

مثال۴-۷- مدل دوجمله‌ای را در نظر بگیرید. فراگرد تصادفی ماکزیمم قیمت را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_k=\max_{1\leq j\leq k}S_j.$$

دراین صورت فراگرد دو بعدی $\{(S_k, M_k)\}_{k=0}^n$ مارکوف است و برای هر تابع دو متغیره حقیقی h داریم:

$$E(h(S_{k+1}, M_{k+1})|F_k) = \tilde{p}h(uS_k, M_k \vee (uS_k)) + \tilde{q}h(dS_k, M_k).$$

توجه کنید که منظور از $a \vee b$ ماکزیمم دو عدد a وb است. حال یک اختیار خرید به ارزش $V_n= u_n(S_n, M_n)$ در زمان سررسید n را در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم ارزش اختیار در زمان سررسید تنها تابعی از قیمت سهام در زمان سررسید است. از آنجا که $(1+r)^{-k}V_k$ مارتینگل است داریم:

$$V_k = \frac{1}{1+r}E(V_{k+1}|F_k).$$

در زمان سر رسید داریم $V_n= u_u(S_n,M_n)$ و بنابر خاصیت مارکوف داریم:

$$V_{n-1} = \frac{1}{1+r}E(u_n(,M_n)\Big|F_{n-1}) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}u_n(uS_{n-1}, uS_{n-1}VM_{n-1}) + \tilde{q}u_n(dS_{n-1}, M_{n-1})\right]$$

بنابراین اگر تابع دو متغیره حقیقی مقدار $u_{n-1}(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$u_{n-1}(x, y) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}u_n(ux, ux \vee y) + \tilde{q}u_n(dx, y)],$$

خواهیم داشت:

$$V_{n-1}= u_{n-1}(S_{n-1}, M_{n-1}).$$

درحالت کلی تابع دو متغیره $u_k(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_k(x, y) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}u_{k+1}(ux, ux \vee y) + \tilde{q}u_{k+1}(dx, y)],$$

دراین صورت قیمت اختیار در زمان k برابر است با:

$$V_k = u_k(S_k, M_k).$$

دراین مثال پورتفولیو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta_k = \frac{u_{k+1}(uS_k, uS_k \vee M_k) - u_{k+1}(dS_k, M_k)}{(u-d)S_k}$$

درمثال بالا فرض مارکوف بودن به ما کمک کرد تا بتوانیم ضابطه‌ای صریح برای V_k، به عنوان تابعی از V_{k+1}، به‌دست آوریم. درنتیجه با شناخت تابع V_{k+1}، تابع V_k کاملاً شناخته می‌شود (رجوع به قسمت نکته‌ها در بخش قبل). بنابراین برای محاسبه ارزش معامله، در زمان صفر V_0، تنها به n محاسبه نیازمندیم (مقایسه کنید با ۲^n در بخش قبل). در حالت خاص اگر ارزش اختیار خرید در زمان سررسید تنها تابعی از S_n باشد $V_n=g(S_n)$ معادلات بالا به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$v_k(x) = \frac{۱}{۱+r}\left[\tilde{p}v_{k+1}(ux) + \tilde{q}v_{k+1}(dx)\right],$$

$$\Delta_k = \frac{v_{k+1}(uS_k)v_{k+1}(dS_k)}{(u-d)S_k},$$

$$V_k=v_k(S_k)$$

جمع‌بندی: درصورت‌بندی احتمالاتی مدل دو جمله‌ای با تغییر تابع اندازه احتمال، روی فضای نمونه‌ای Ω از p به $\tilde{p}$ و استفاده از ضریب $(1+r)^{-k}$ درفراگردهای تصادفی S_k و X_k، فراگردهای تصادفی مارتینگل $(1+r)^{-k}S_k$ و $(1+r)^{-k}X_k$ بر روی فضای $(\omega, F, \tilde{P})$ را به دست آوردیم. به این ترتیب محاسبه ارزش حال اختیار معامله به یک محاسبه امید ریاضی بر روی فضای احتمالاتی جدید تبدیل شد. این ره‌یافت به حالت پیوسته قابل تعمیم است، که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم.[۱]

اکنون به بررسی مدل‌های اختیار معامله امریکایی[۲] می‌پردازیم. در این روش اختیار معامله شخص خریدار اختیار، می‌تواند برحسب پیش‌بینی‌های خود قبل از رسیدن زمان سررسید

[1] Shreve (1997)
[2] American option

اختیار خود را اعمال[1] کند. برای آن‌که شخص تصمیم بگیرد، برحسب پیش‌بینی‌های خود قبل از رسیدن زمان t اختیار خود را اعمال کند یا نه نیاز به محک‌هایی دارد. این محک‌ها همگی در قالب متغیرهای تصادفی موسوم به زمان توقف[2] قابل بیان هستند. اکنون به بیان تعریف یک اختیار امریکایی و خواص آن می‌پردازیم:

تعریف۴-۸- (اختیار خرید امریکایی) یک اختیار خرید امریکایی در مدل دو جمله‌ای عبارتست از: یک دنباله از متغیرهای تصادفی $\{G_k\}_{k=.}^{n}$ به‌طوری‌که هر G_k، F_k اندازه‌پذیر است. دارنده‌ی اختیار امریکایی قادر است، در هر زمان k اختیار خود را اعمال کند، که در صورت اعمال مبلغ G_k را دریافت می‌کند.

مجموعه‌ی تمام زمان توقف‌هایی که $\tau \geq k$ را با T_k نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم (امید شرطی با اندازه‌ی احتمال بی‌تفاوت نسبت به ریسک $\tilde{P}$ محاسبه می‌گردد):

$$V_k = \max_{\tau \in T_k} (1+r)^k E((1+r)^{-\tau} G_\tau | F_k)$$

به‌طور شهودی واضح است که، ارزش این اختیار امریکایی در زمان k می‌بایست برابر V_k تعریف شده در بالا باشد. واضح است که، $V_k \geq G_k$. اما اگر در زمان k به تساوی $V_k=G_k$ برسیم، در این صورت مالک اختیار حتماً می‌بایست آنرا اعمال کند، توجه کنید که، در این زمان هیچ امیدی به بالاتر رفتن ارزش اختیار در زمان‌های بعدی نیست. اگر مالک اختیار را اعمال نکند، در این صورت فرصتی برای ذخیره ثروت، برای فروشنده‌ی اختیار به‌دست می‌آید؛ به بیان دیگر فروشنده‌ی اختیار، قادراست $C_k = V_k - \frac{1}{1+r} E(V_{k+1} | F_k)$ را از فراگرد پوشش ریسک خارج کند، بدون آن‌که در زمان‌های بعدی مشکلی جهت پوشش ریسک برای او به‌وجودآید. اگر قرار دهیم $\tilde{\omega}_k = (\omega_1, ..., \omega_k)$ در این‌صورت استراتژی پوشش ریسک در اختیار امریکایی توسط فراگرد سرمایه‌گذاری زیر داده می‌شود:

$$\Delta_k(\tilde{\omega}_k) = \frac{V_{k+1}(\tilde{\omega}_k H) - V_{k+1}(\tilde{\omega}_k T)}{S_{k+1}(\tilde{\omega}_k H) - S_{k+1}(\tilde{\omega}_k T)}.$$

با توجه به ذخیره‌ی مبلغ C_k توسط فروشنده‌ی اختیار، فراگرد ثروت ناشی از سرمایه‌گذاری به طریق زیر به‌دست می‌آید:

$$X_k = \Delta_{k-1} S_k + (1+r)(X_{k-1} - C_k - \Delta_{k-1} S_{k-1}).$$

---

[1] exercise
[2] stopping time

حال می‌توان ثابت کرد: $X_k=V_k$، برای هر k. این تساوی نشان می‌دهد که در هر زمان k فروشنده‌ی اختیار، توانایی پوشش تعهد در آن زمان را دارد و در نتیجه استراتژی Δ یک فراگرد پوشش ریسک است.

۵- مدل پیوسته

همانند مدل دوجمله‌ای فرض می‌کنیم، یک نوع سهام با تغییرات پیوسته‌ی قیمت در زمان پیوسته در بازار سهام وجود دارد. نرخ بهره را برابر با مقدار ثابت r در نظر می‌گیریم. همانند گذشته قیمت سهام را با S_t نمایش می‌دهیم که در آن $t\in R$ است. بنابراین متغیر تصادفی $S_t:\Omega \to R$ عبارت است از قیمت سهام در زمان t. یک نقطه از فضای نمونه‌ای $\omega\in\Omega$ را می‌توان به عنوان یک سناریوی ممکن برای تغییرات بازار سهام در نظر گرفت. یعنی تناظری یک به یک میان $\omega\in\Omega$ و تابع $S_t(\omega):t\to S_t(\omega)$ به‌دست می‌آید. مفاهیم فراگرد تصادفی، فیلترسازی و مارتینگل همانند حالت گسسته تعریف می‌گردند؛ به عنوان مثال: $F_t=\{\sigma(S_s):s \leq t\}$ عبارتست از تمام اطلاعات موجود از تغییرات قیمت بازار سهام تا زمان t-ام. در مدل‌بندی در حالت پیوسته نیاز داریم که تغییرات تابع قیمت را به‌وسیله مدلی تصادفی از فراگردهای تصادفی شناخته شده، توصیف کنیم. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که لگاریتم تغییرات نسبت S_t-ها دارای نوسان‌هایی شبیه حرکت براونی است. از این رو در رهیافت معادلات دیفرانسیلی به مساله ارزش‌گذاری اختیار معامله فرض می‌گردد تغییرات دیفرانسیلی بازار سهام تابعی از یک حرکت براونی است.

یک استراتژی برای خرید سهام $\Delta(t)$ عبارت است از یک فراگرد تصادفی$\Delta(t,\omega):R\times\Omega\to R$ که برابر است با تعداد سهامی که سهام‌دار در زمان t در دست دارد، اگر سناریوی $\omega\in\Omega$ رخ داده باشد. فرض می‌کنیم که $\Delta(t)$ با فیلترسازی $\{F_t\}$ سازگار است؛ یعنی استراتژی خرید برای سناریوی ω در زمان t، تنها با داشتن اطلاعات سناریوی ω تا زمان t کاملاً مشخص می‌گردد. به‌همین ترتیب ثروت سهام‌دار نیز به‌صورت یک متغیر تصادفی $X(t.\omega)$ تعریف می‌گردد. مشابه فرمول (۱) از بخش قبل، ثروت سهام‌دار در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$dX(t)= \Delta(t)dS(t)+r[X(t)-\Delta(t)S(t)]dt \qquad (۱)$$

بنابراین مساله یافتن یک استراتژی پوشش ریسک برای یک اختیار خرید اروپایی با زمان سررسید T به ارزش $V(S(T))=g(S(T))$، با رهیافت بالا، معادل است با حل معادله دیفرانسیل تصادفی (1) با شرط اولیه‌ی$X(T)=g(S(T))$. درحالت کلی حل معادله‌ی دیفرانسیل (1) نیازمند یک نظریه انتگرال‌گیری، برای فراگردهای تصادفی است. این نظریه توسط ایتو معرفی شده

است. اگرچه نظریه انتگرال‌گیری ایتو همانند نظریات انتگرال‌گیری ریمان و لبگ وجود انتگرال برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل را اثبات می‌کند، اما همانند این نظریات برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی دقیق انتگرال‌های تصادفی کمک چندانی نمی‌کند. مساله‌ی دیگری که هم از جهت اقتصادی و هم ریاضی مهم است، مدل‌بندی فراگرد تغییرات قیمت بازار سهام $S(t)$ است. بشلیه[۱] برای نخستین بار در حدود صد سال پیش این فراگرد را همانند یک حرکت براونی توصیف کرد $dS(t)=\sigma(t)\ dW(t)$. ساموئلسون[۲] در دهه‌ی شصت میلادی پیشنهاد کرد که، به‌جای فراگرد قیمت، بازده[۳] (تفاوت لگاریتم قیمت‌ها) به‌عنوان یک حرکت براونی مدل‌بندی گردد. بنابراین معمولاً فراگرد $S(t)$ به‌صورت کلی زیر مدل‌بندی می‌گردد.

$$\frac{dS(t)}{S(t)}=\mu(t,S(t))dt+\sigma(t,S(t))dW(t).$$

ضرایب $\mu(t)$ که به آن مقدار مورد انتظار[۴] و $\sigma(t)$ که به آن نوسان پذیری قیمت می‌گوییم، در هر مدل خاص، ابتدا بر حسب ضرایبی معین شده و سپس این ضرایب جدید با توجه به مشاهدات آماری انجام گرفته از بازار سهام مورد مطالعه، مشخص می‌گردند. در مدل بلک- شولز مقدار مورد انتظار و نوسان‌پذیری ثابت فرض می‌شوند و مدل به‌صورت زیر است[۵] :

$$\frac{\mathrm{dS(t)}}{\mathrm{S(t)}}=\mu\mathrm{dt}+\sigma\mathrm{dW(t)}.$$

مثال ۵-۱- (محاسبه‌ی فراگرد پوشش ریسک در مدل بلک- شولز) در این مثال یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای فراگرد پوشش ریسک اختیار خرید اروپایی (فراگرد ثروت) در مدل بلک- شولز، به ارزش توافقی $g(S(T))$ در زمان سررسید T، به‌دست می‌آوریم. با توجه به مدل قیمت در این مدل، معادله‌ی دیفرانسیل کلی فراگرد ثروت، فرمول (۱)، در مدل بلک – شولز به صورت زیر در می‌آید:

$$dX(t)= rX(t)dt+ \Delta(t)S(t)(\mu-r)dt + \Delta(t)S(t)\sigma dW(t) \qquad (۲)$$

فرض کنید $u(t,x)$ ارزش این اختیار در زمان t و با قیمت سهام $S(t)=x$ باشد. بنا بر فرمول ایتو، دیفرانسیل این تابع برابر است با:

---

[1] Bachelier
[2] Samuelson
[3] return
[4] expected gain
[5] Black and Scholes (1973)

$$\mathrm{du(t,S(t)} = u_t dt + u_x ds + \frac{1}{2} u_{xx} dSdS$$
$$= \mathrm{u_t dt + u_x [\mu Sdt + SdW] + \frac{۱}{۲} u_{xx} \sigma^{۲} S^{۲} dt}$$
$$= \left[u_t + \mu S u_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{xx}\right] dt + \sigma S u_x dW.$$

یک پوشش ریسک، با یک ثروت اولیه‌ی $X(0)$ (ارزش حال اختیار معامله) شروع می‌کند و سرمایه‌گذاری چنان صورت می‌گیرد که ثروت $X(t)$ برابر ارزش اختیار معامله در زمان t، یعنی $u(t,S(t))$ گردد. برای تضمین $X(t)=u(t,S(t))$ ضرایب دو معادله دیفرانسیل بالا را متحد قرار می‌دهیم:

$$\Delta(t)= u_x(t,S(t))$$

$$u_t + \mu S u_x + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲} S^{۲} u_{xx} = rX + \Delta(\mu - r)S$$

با جای‌گذاری این معادلات به معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر می‌رسیم:

$$u_t + rxu_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} = ru$$

معادله‌ی دیفرانسیل بالا می‌بایست در شرط اولیه‌ی $u(T,x)= g(x)$ صدق کند. اگر یک سهام‌دار با ثروت اولیّه $X(0) = u(0,S(0))$ شروع کند و از پوشش ریسک $\Delta(t)= ux(t,S(t))$ استفاده کند، ثروت او در هر زمان برابر ارزش اختیار خرید خواهد بود: $X(t)=u(t,S(t))$ و به‌ویژه: $X(T)=g(S(T))$.

۵-۱- شرایط برروی استراتژی‌های پوشش ریسک:

در مدل‌های پیوسته اعمال شرایط محدودکننده برروی استراتژی‌های پوشش ریسک لازم است. به قضیه‌ی زیر توجه کنید:

قضیه ۵-۲- فرض کنید F یک متغیر تصادفی F_T– اندازه‌پذیر باشد. فراگرد تصادفی $\phi = (\phi_۱, \phi_۲)$ سازگار با فیلترسازی $\{F_t\}$ موجود است[1] به قسمی که:

$$F(\omega) = \int_0^T \phi_1(t,\omega)dt + \int_0^T \phi_2(t,\omega)dW(t).$$

[1] Dudley and Weiner (1977)

قضیه‌ی بالا نشان می‌دهد، برای هر اختیار معامله‌ی دل‌خواه $V(T)$ که F_T– اندازه‌پذیر است، و با شروع از ثروت دل‌خواه X_0 همواره می‌توان یک فراگرد پوشش ریسک سازگار با فیلترسازی یافت و بنابراین هر اختیار معامله‌ای قابل پوشش ریسک است. بنابراین شرط سازگاری با فیلترسازی برای یک فراگرد پوشش ریسک شرط بسیار ضعیفی است. برای مشاهده‌ی انواع شرط‌هایی که براستراتژی‌های پوشش ریسک اعمال می‌گردد[۱].

۵-۲- آربیتراژ و شرط وجود عدم آربیتراژ برحسب خاصیت مارتینگل:

تعریف۵-۳- یک استراتژی پوشش ریسک را یک آربیتراژ برای بازار $S(t)$ می‌گوییم اگر فراگرد ثروت این استراتژی $X(t)$ درشرایط زیر صدق کند:

$$X(0) = 0, \quad X(T) \geq 0, \quad P(X(T) > 0) > 0.$$

قضیه۵-۴- فرض کنید Q یک تابع اندازه‌ی احتمال هم ارز باشد (P و Q هم ارزند هرگاه از $P(A)=0$ نتیجه $Q(A)=0$ و برعکس) و فرض کنید $S(t)$ نسبت به اندازه‌ی Q یک مارتینگل است، **در این‌صورت بازار $S(t)$ فاقد آربیتراژ است.**

برای قضیه‌ی بالا می‌توان معکوسی را نیز بیان کرد؛ یعنی اگر بازار در شرط NFLVR[۲] صدق کند، در این صورت یک تابع اندازه احتمال هم ارز p وجود دارد که بازار نسبت به آن در شرط مارتینگل صدق می‌کند[۳].

نکته‌ی پایانی: قضایای فوق که بیان‌گر راه‌برد احتمالاتی (گسسته و پیوسته) به مساله مدل‌سازی تغییرات قیمت و نیز اثبات وجود یک فرایند پوشش ریسک هستند، اغلب تحت مفروضات معینی منجر به معادلات دیفرانسیل تصادفی از انواع مختلف می‌شوند و شرایط وجود جواب و خواص جواب‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. در عمل اغلب از روش‌های عددی و فرایندهای شبیه‌سازی تصادفی برای به‌دست آوردن جواب استفاده می‌شود. امروزه نرم‌افزارهای محاسباتی متنوعی، برای یافتن قیمت انواع گوناگونی از اختیار معامله با ویژگی‌های مختلف در دسترس است که، بسته به مفروضات مدل و نحوه‌ی انجام محاسباتی جواب را با دقت‌های متفاوتی به‌دست می‌آورند.

---

[1] Hunt & Kennedy (2000)
[2] no free lunch with vanishing risk
[3] Delbaen and Schachermayer (1995)

منابع و مآخذ

Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *J. Political Economy*, 3, 637-654, 1973.

Bodie, Z., A. Kane, and A. Marcus, *J. Investments*, Irwin Professional Publishing, 1996.

Delbaen, F., W. Schachermayer, "The existence of absolutely continuous local martingale measures", *Ann. Of Applied Probability 5*, 926-945, 1995.

Dudley, R. and M. Weiner "functionals as Ito integrals", *Ann. Probability 5*, 140-141, 1977.

Hull, J and C. Options, "*Futures & Other Derivatives*", Prentice-Hall, Inc., 1989.

Hunt, P. J. and J. Kennedy, *"E Financial Derivatives in Theory and Practice"*, Wiley, 2000.

Merton, R. C., "Theory of rational option pricing", Bell *J. of Economy and Management Science*, 4 (1), 141-183, 1973.

Oksendal, B., "*Stochastic Differential Equations*", Springer- Verlag Publication, 2000.

Ricardo, R., "*Interest Rate Option Models*", Wiley Publications, 1999.

Shreve, S., "*Stochastic Calculus and Finance"*, Preprint, 1997.